Univ.-Prof. Dr. Joachim Grosser

Modul 32751
Konstruktion und Analyse ökonomischer Modelle

Kurseinheit 2

LESEPROBE

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis Kurseinheit 1

Inhaltsverzeichnis Kurseinheit 2

Kapitel 2

Eindimensionale unbeschränkte Optimierung

2.1 Komponenten eines Optimierungsproblems

Das unter technischen Gesichtspunkten einfachste Optimierungsproblem ist jenes, bei dem ein Akteur die Ausprägung einer einzigen Verhaltensvariablen wählen muss und dabei keinerlei Beschränkungen unterliegt. Als Beispiel können wir die Bestimmung der gewinnmaximierenden Angebotsmenge einer Firma verwenden, die sich in vollkommener Konkurrenz mit vielen anderen Unternehmen befindet. Der Term 'vollkommene Konkurrenz' wird synonym auch dadurch beschrieben, dass man für die betrachtete Firma von 'Mengenanpasserverhalten' ausgeht. Inhaltlich bedeutet das, dass man die einzelne Firma als zu klein und zu unbedeutend für die Marktverhältnisse betrachtet, um diese Verhältnisse merklich beeinflussen zu können. Speziell ist die Höhe des Preises des betreffenden Guts p nicht davon abhängig, ob die einzelne Firma viele oder wenige Güter anbietet. 'Vollkommene Konkurrenz' oder 'Mengenanpasserverhalten' sind also verbale Kurzformen für die technische Aussage, dass der Güterpreis in dem zu konstruierenden Optimierungsmodell eine exogene Größe darstellt. Mit der Annahme des Mengenanpasserverhaltens ergibt sich der Umsatz bei der Angebotsmenge x ganz einfach als $p \cdot x$.

Die Kostenfunktion schreiben wir vorerst sehr allgemein als $C(x)$. Nun können wir das Optimierungsproblem der Firma formulieren. Es ist hilfreich, sich gleich von Anfang an anzugewöhnen, Optimierungsprobleme in einem festen *Format* zu formulieren, das alle für den Leser relevanten Informationen enthält. Ein solches Format sieht wie folgt aus:

$$max_{\,x}\, p \cdot x - C(x). \tag{2.1.1}$$

Der Operator 'max' signalisiert, dass es sich bei dem Optimierungsproblem um ein *Maximierungsproblem* handelt. Ginge es darum, ein Zielkriterium wie beispielsweise die Kosten oder die Wahrscheinlichkeit eines Schadensereignisses zu minimieren, dann würde dieses *Minimierungsproblem* durch den Operator 'min' angezeigt. Die tief gestellte Variable 'x' deutet an, dass die Maximierung durch eine gewinnmaximierend gewählte Angebotsmenge x erreicht werden soll, also nicht etwa durch einen gewinnmaximierenden Preis (der ja im Rahmen des Modells exogen ist). Hinter '$max_{\,x}$' steht dann die sog. *Zielfunktion*, ein mathematisch formuliertes Kriterium zum Vergleich verschiedener Werte der endogenen Variablen hinsichtlich ihrer Erwünschtheit: x_1 ist besser (erwünschter) als x_2, genau dann, wenn $p \cdot x_1 - C(x_1) > p \cdot x_2 - C(x_2)$. Ein vollständig formuliertes Optimierungsproblem besteht also aus

- einer Zielfunktion
- der Angabe der Variablen, durch deren geeignete Wahl die Zielfunktion optimiert werden soll und
- der Angabe der Richtung, in die optimiert werden soll (Minimierung oder Maximierung der Zielfunktion).

2.2 Optimalitätsbedingungen

Nachdem das Optimierungsproblem formuliert ist, geht es darum, Eigenschaften der Lösung des Problems zu finden, um dann schließlich komparativ-statische Analysen anstellen zu können. Solche Eigenschaften bezeichnet man als Optimalitätsbedingungen, weil sie erfüllt sein müssen, damit ein Optimum vorliegt.

Die Lösung des vorliegenden Problems ist ein Wert x^*, der die Gewinnfunktion maximiert. Wenn man auch vorerst über x^* noch gar nichts weiß, so weiß man doch, dass es jener Wert ist, der den Wert der Gewinnfunktion größer macht, als jeder andere Wert. Wenn man diese Information formal hinschreibt, kommt man ein Stückchen voran:

$$\text{Für}\, x^* \,\text{gilt}: \; p \cdot x^* - C(x^*) \;\geq\; p \cdot x - C(x) \;\forall\, x \;\neq\; x^*. \qquad (2.2.1)$$

Wir fordern also nicht, dass der Gewinn bei x^* *strikt größer* ('$>$') ist als bei jeder anderen Angebotsmenge. Es ist ausreichend zu verlangen, dass keine andere Angebotsmenge einen höheren Gewinn erbringt als x^*. Damit lassen wir den Fall zu, dass es mehrere gewinnmaximierende Angebotsmengen gibt, die jeweils zu einem gleich hohen Gewinnbetrag führen, der von anderen Angebotsmengen nicht übertroffen wird.

Um präzisere Informationen über x^*zu erhalten beschränken wir unsere Betrachtung auf die nähere Umgebung von x^*. Dort kann man ohne großen Fehler die folgende lineare Approximation vornehmen:[1]

$$p \cdot x - C(x) \approx p \cdot x^* - C(x^*) + [p - \frac{dC(x^*)}{dx}] \cdot (x - x^*). \qquad (2.2.2)$$

[1]Zur Erinnerung: In der Nähe einer Approximationsstelle x_0 kann man jede Funktion $f(x)$ durch die lineare Funktion $f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot (x - x_0)$ annähern.

Eingesetzt in (2.2.1) ergibt sich dann als Eigenschaft von x^*

$$p \cdot x^* - C(x^*) \quad \geq \quad p \cdot x^* - C(x^*) + [p - \frac{dC(x^*)}{dx}] \cdot (x - x^*) \tag{2.2.3}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq [p - \frac{dC(x^*)}{dx}] \cdot (x - x^*). \tag{2.2.4}$$

In der Nähe von x^*muss also gelten

$$[p - \frac{dC(x^*)}{dx}] \begin{cases} \leq 0 & f\ddot{u}r\, x > x^* \\ \geq 0 & f\ddot{u}r\, x < x^*. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Diese Bedingungen sind verräterisch. Sie sagen uns nämlich, dass die erste Ableitung der Gewinnfunktion nach der endogenen Variablen an der Stelle des Maximums $p - \frac{dC(x^*)}{dx}$ gleich Null sein muss: Ein Term, der wie $p - \frac{dC(x^*)}{dx}$ nicht von x abhängt, kann für unterschiedliche Werte von x nicht unterschiedliche Vorzeichen annehmen. Er muss also zugleich mindestens Null und darf höchstens gleich Null sein. Das geht aber nur, wenn er gleich Null ist.

Die Intuition hinter der Bedingung $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ ist ganz einleuchtend: Wir suchen ein Maximum der Gewinnfunktion. Wäre an einer Stelle die Ableitung der Gewinnfunktion nach x positiv, dann hätte die Gewinnfunktion dort einen ansteigenden Verlauf. Durch eine Erhöhung von x könnte der Gewinn noch gesteigert werden, und die betrachtete Stelle könnte daher kein Maximum darstellen. Wäre hingegen die Ableitung negativ, dann hätte die Gewinnfunktion einen fallenden Verlauf. Durch eine Reduktion von x könnte der Gewinn gesteigert werden, die betrachtete Stelle wäre kein Maximum. Ein Maximum kann also nur dort auftreten, wo die erste Ableitung gleich Null ist. Man bezeichnet eine solche Stelle als einen *stationären Punkt*.

Das ist schon mal eine schöne Information, die wir in der komparativ-statischen Analyse einsetzen können: Das zu untersuchende Maximum ist ein stationärer Punkt.[2]

2.2.1 Notwendigkeit der Stationaritätsbedingung

Nun müssen wir überlegen, wie stark der Zusammenhang zwischen der Maximumseigenschaft von x^*und der Eigenschaft, ein stationärer Punkt zu sein, ist: Ist jedes Maximum ein stationärer Punkt? Ist jeder stationäre Punkt ein Maximum? Mit anderen Worten: Ist die Stationaritätseigenschaft eine notwendige Eigenschaft des Maximums (Maximum⇒Stationarität), ist die Maximumseigenschaft eine notwendige Eigenschaft jedes stationären Punkts (Stationarität⇒Maximum) oder treten Stationarität und Maximumseigenschaft gar immer zusammen auf (Maximum⇔Stationarität)?

Im vorliegenden Fall lassen sich die Verhältnisse relativ leicht durchschauen. Dennoch wollen wir sie noch einmal kurz genauer unter die Lupe nehmen, weil wir dabei zwei wichtige Beweisstrategien kennen lernen können, die in der Analyse ökonomischer Modelle immer wieder vorkommen.

Zunächst wenden wir uns der Frage zu, ob jedes Maximum einen stationären Punkt darstellt: Maximum$\overset{?}{\Rightarrow}$Stationarität.
Diese Frage beantworten wir mit der grundlegenden Beweisstrategie des *Widerspruchsbeweises.* Beim Widerspruchsbeweis geht man davon aus, dass die Voraussetzung (hier: x^* ist ein Maximum) gilt, dass aber zugleich die Implikation (x^*ist ein stationärer Punkt) *nicht* gilt. Das Material des Beweises

[2] In der ersten Kurseinheit hatten wir die Bedingung $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ aus einem anderen Gedanken hergeleitet: Wenn man sich die Suche nach dem Maximum als einen in der Zeit ablaufenden Planungsprozess vorstellt, kann man aus der Bewegungsgleichung $\frac{\partial x}{\partial t} = v(p - \frac{dC(x^*)}{dx})$ die Gleichgewichtsbedingung $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ herleiten. Da sich die beiden Herleitungen im Ergebnis nicht widersprechen, kann man sie einfach als zwei unterschiedliche Sichtweisen auf das Problem einer näheren Charakterisierung des Maximums (einmal als Gleichgewicht eines Planungsprozesses, das andere Mal als stationären Punkt) betrachten.

besteht damit aus den Aussagen 'x^*ist ein Maximum' und 'x^* ist *kein* stationärer Punkt'. Ziel des Beweises ist nun zu zeigen, dass aus der zweiten Aussage folgt, dass die erste nicht gelten (wahr sein) kann. Im vorliegenden Fall kann man dabei folgendermaßen vorgehen:

$$x^* \text{ ist kein stationärer Punkt} \quad \Rightarrow \tag{2.2.6}$$

$$\Rightarrow \; p - \frac{dC(x^*)}{dx} \neq 0 \tag{2.2.7}$$

$$\Rightarrow (p - \frac{dC(x^*)}{dx}) \cdot (x - x^*) \neq 0 \forall\, x \neq x^*. \tag{2.2.8}$$

Wenn man nun x so wählt, dass $(x - x^*)$ das gleiche Vorzeichen hat wie $p - \frac{dC(x^*)}{dx}$, dann gilt

$$\Rightarrow \; p \cdot x^* - C(x^*) + (p - \frac{dC(x^*)}{dx}) \cdot (x - x^*) > p \cdot x^* - C(x^*) \tag{2.2.9}$$

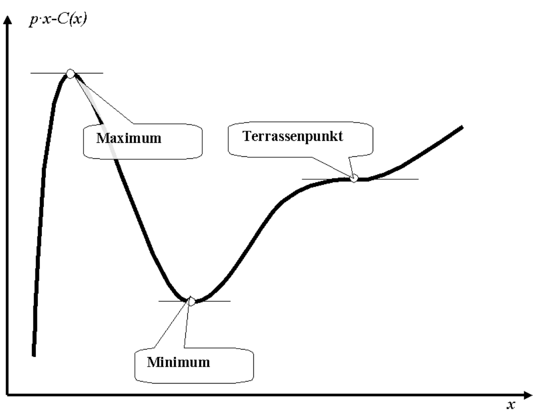
und wegen $p \cdot x^* - C(x^*) + (p - \frac{dC(x^*)}{dx}) \cdot (x - x^*) \approx p \cdot x - C(x)$ auch

$$p \cdot x - C(x) > p \cdot x^* - C(x^*). \tag{2.2.10}$$

Damit ist bewiesen, dass x^*kein Maximum ist, weil sich in der Umgebung dieses Punkts Werte für x finden lassen, die einen höheren Gewinn implizieren. Kurz: 'Wenn x^*kein stationärer Punkt ist, dann ist es auch kein Maximum'. Nun hatten wir aber eingangs behauptet 'x^*ist ein Maximum'. x^*kann aber nicht zugleich ein Maximum und kein Maximum sein! Daraus können wir folgern, dass x^*nicht zugleich ein Maximum und nicht-stationär (und demzufolge *kein* Maximum) sein kann: Die Maximumseigenschaft und die Eigenschaft der Nicht-Stationarität können niemals zusammen auftreten, oder anders gewendet: Wenn Maximum, dann immer auch Stationarität: Maximum⇒Stationarität und wenn Nicht-Stationarität, dann niemals Maximum: Nicht-Stationarität $\Rightarrow \neg$Maximum.[3]

Zusammenfassend geht man beim Widerspruchsbeweis also so vor:
Gezeigt werden soll, dass die Aussage $A \Rightarrow B$ gilt. Dazu nimmt man an, dass A und $\neg B$ gelten. Dann zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ und fertig!

Nun kommen wir zu Stationarität$\overset{?}{\Rightarrow}$Maximum und damit zur Technik des *Gegenbeweises*. Die Idee hinter dieser Vorgehensweise besteht darin zu zeigen, dass eine Aussage nicht gilt, indem man ein Gegenbeispiel anführt. Die Aussage 'Jeder stationäre Punkt ist ein Maximum' (Stationarität$\Rightarrow$Maximum) kann also widerlegt werden, wenn es gelingt, eine Situation zu konstruieren, in der ein Punkt zwar stationär ist, aber kein Maximum darstellt. Im vorliegenden Fall kann man dabei grafisch vorgehen:



An der Grafik lassen sich zwei Arten von stationären Punkten erkennen, die keine Maxima darstellen: Minima (wie x_2) und Wende- oder Terrassenpunkte (x_3). Damit ist auch schon gezeigt, dass die Stationaritätseigenschaft nicht die Maximumseigenschaft impliziert: Stationarität $\not\Rightarrow$Maximum.

[3]Das Zeichen '$\neg$'ist der sog. Verneinungsoperator. '$\neg$Maximum' steht für 'kein Maximum'.

2.2.2 Die Bedingung zweiter Ordnung

Die Grafik zeigt uns auch, welche Eigenschaft ein Maximum von einem Minimum oder einem Wendepunkt unterscheidet: Bei einem Maximum ändert sich der Verlauf der betreffenden Funktion von 'ansteigend' zu 'abfallend'. Bei einem Minimum hingegen wechselt er von 'fallend' zu 'steigend'. Ein Wendepunkt schließlich ist dadurch gekennzeichnet, dass der Anstieg links und rechts von diesem Punkt das gleiche Vorzeichen hat. Der für ein Maximum relevanten Eigenschaft kommen wir auf die Spur, wenn wir uns an den Satz von Taylor (KE1, S. 192f) erinnern. Dieser Satz besagt, dass man jede Funktion $f(x)$ als Summe darstellen kann:

$$f(x) \;=\; f(x_0) \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (x - x_0)^n. \qquad (2.2.11)$$

Wenn man diese Reihe bei $n = 1$ abbricht, spricht man davon, dass man die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ *linear approximiert* hat (auch: Taylor-Approximation erster Ordnung). Genau das haben wir oben bereits getan, indem wir die Zielfunktion an der Stelle $x = x^*$approximiert haben:

$$p \cdot x - C(x) \;\approx p \cdot x^* - C(x^*) \,+\, [p - \frac{dC(x^*)}{dx}] \cdot (x - x^*). \qquad (2.2.12)$$

Daraus ergibt sich aber lediglich die Information, dass die Ableitung der Zielfunktion nach der endogenen Variablen an der Stelle des Maximums gleich Null sein muss. Weitere Informationen erhalten wir, wenn wir die Taylor-Reihe nach n= 2 abbrechen, also die Zielfunktion quadratisch approximieren:

$$p{\cdot}x - C(x) \;\approx p{\cdot}x^* - C(x^*) + \left[p - \frac{dC(x^*)}{dx}\right]{\cdot}(x - x^*) + \left[-\frac{d^2C(x^*)}{dx^2}\right]{\cdot}\frac{1}{2!}{\cdot}(x - x^*)^2. \qquad (2.2.13)$$

Nun wissen wir aber bereits, dass gelten muss $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$. Daher

$$p \cdot x - C(x) \;\approx p \cdot x^* - C(x^*) \,+\, \left[-\frac{d^2C(x^*)}{dx^2}\right] \cdot \frac{1}{2!} \cdot (x - x^*)^2. \qquad (2.2.14)$$

Diese Approximation verwenden wir nun, um die rechte Seite in $p \cdot x^* - C(x^*) \geq p \cdot x - C(x) \; \forall x \neq x^*$ zu ersetzen:

$$p \cdot x^* - C(x^*) \geq p \cdot x^* - C(x^*) + \left[-\frac{d^2 C(x^*)}{dx^2} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot (x - x^*)^2 \; \forall x \neq x^* \quad (2.2.15)$$

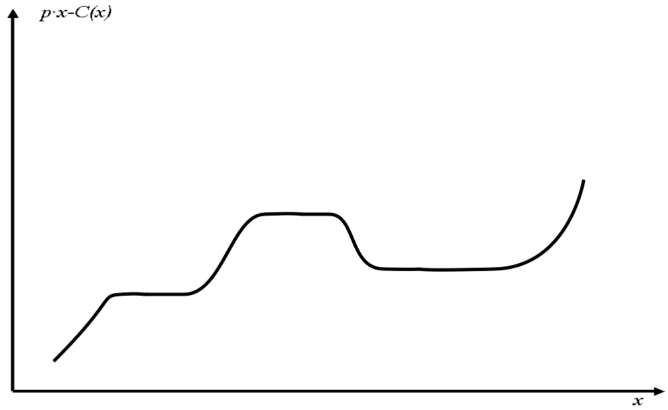
$$\Leftrightarrow$$

$$0 \geq \left[-\frac{d^2 C(x^*)}{dx^2} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot (x - x^*)^2 \; \forall x \neq x^* \quad (2.2.16)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 \geq -\frac{d^2 C(x^*)}{dx^2}. \quad (2.2.17)$$

Wir erhalten also als Bedingung für ein Maximum, dass die zweite partielle Ableitung der Zielfunktion nach der endogenen Variablen nicht positiv sein darf. Wenn die zweite Ableitung strikt negativ ist ($0 > -\frac{d^2C(x^*)}{dx^2}$), liegt ganz klar ein Maximum vor: Die erste Ableitung ist gleich Null. Eine negative zweite Ableitung heisst, dass links von x^* die erste Ableitung positiv und rechts davon negativ ist. Der Anstieg der Gewinnfunktion wechselt demzufolge bei $x = x^*$ sein Vorzeichen von positiv nach negativ. Genau diese Eigenschaft hatten wir uns bereits bei der Betrachtung der Grafik mit mehreren stationären Punkten überlegt. Ein wenig problematischer ist hingegen der Fall einer zweiten Ableitung von Null ($0 = -\frac{d^2C(x^*)}{dx^2}$): Diese Eigenschaft besagt, dass sich der Wert der ersten Ableitung nicht ändert, wenn man sich von der Stelle x^* weg bewegt. Anders formuliert: In der Nähe des stationären Punkts x^* liegen weitere stationäre Punkte. Die folgende Grafik verdeutlicht, dass wir auf einem waagrecht verlaufenden Segment einer Kurve durch die Betrachtung der zweiten Ableitung nicht entscheiden können, ob es sich bei den stationären Punkten um x^* herum um Maxima, Minima oder Terrassenpunkte handelt.



2.2.3 Anwendbarkeit des IFT und komparative Statik

Offenbar ist das Kriterium des Vorzeichens der zweiten Ableitung nicht trennscharf genug, um zwischen den einzelnen Typen von stationären Punkten unterscheiden zu können. Als Ausweg aus dieser analytischen Sackgasse können wir die Anforderung, die wir an x^* stellen, verschärfen. Zu diesem Zweck müssen wir kurz überlegen, worauf wir überhaupt hinaus wollen. Ziel ist es, im Rahmen einer komparativ-statischen Analyse zu untersuchen, wie sich die gewinnmaximierende Angebotsmenge x^* als Reaktion auf Parameteränderungen (hier: Preisänderungen) verändert. Diese Änderung soll als Ableitung $\frac{dx^*(p)}{dp}$ einer Funktion $x^*(p)$ angegeben werden. Diese Funktion muss aber auch existieren! Wann gibt es also eine Funktion $x^*(p)$, die zu jedem Wert von p diejenige Angebotsmenge x^* angibt, die die Stationaritätsbedingung $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ erfüllt? Die Antwort liefert das implizite Funktionen Theorem (IFT)[4]: Die Stationaritätsbedingung definiert implizit den gesucht-

[4]Das IFT besagt, dass, wenn es einen Punkt (z_0, α_0) gibt, sodass gilt:

$$g(z_0, \alpha_0) = 0$$

und zugleich $\frac{\partial g(z_0, \alpha_0)}{\partial z} \neq 0$,
dann existiert in der Nähe des Werts α_0 eine Funktion $z^*(\alpha)$
mit den Eigenschaften
$g(z^*(\alpha), \alpha) = 0$
und
$\frac{dz^*(\alpha)}{d\alpha} \equiv -\frac{\frac{\partial g(z^*, \alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial g(z^*, \alpha)}{\partial z}}$

en Zusammenhang zwischen x^* und p. Die gesuchte Funktion $x^*(p)$ existiert wenn gilt $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} \neq 0$.[5]

Tragen wir nun die gefundenen Informationen zusammen:
Die gewinnmaximierende Angebotsmenge muss die Stationaritätsbedingung $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ erfüllen. Um stationäre Punkte, die Minima darstellen, auszuschließen, muss zusätzlich gelten $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} \geq 0$. Damit die gesuchte Funktion $x^*(p)$ existiert, benötigen wir überdies $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} \neq 0$. Aus der zweiten und der dritten Bedingung folgt $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} > 0$.

Damit ist das Feld für die intendierte komparativ-statische Analyse bereitet:
Die zu untersuchende Funktion $x^*(p)$ wird implizit durch die Stationaritätsbedingung $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ definiert. Von allen stationären Punkten betrachten wir jene, bei denen gilt $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} > 0$. Somit können wir das IFT anwenden um abzuleiten $\frac{dx^*}{dp} = -\frac{1}{-\frac{d^2C(x^*)}{dx^2}} > 0$: Die Angebotsfunktion $x^*(p)$ hat einen ansteigenden Verlauf.

Zur inhaltlichen Interpretation dieses Resultats betrachten wir die Stationaritätsbedingung genauer:
Die Bedingung $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ enthält zwei Komponenten, die sich auf die Gewinnfunktion $p \cdot x - C(x)$ beziehen lassen: p gibt den zusätzlichen Umsatz an, der sich durch die geringfügige Ausweitung der Angebotsmenge erzielen lässt. Die Grenzkosten $\frac{dC(x^*)}{dx}$ messen die durch diese Angebotsausweitung verursachten Zusatzkosten. Hinsichtlich der Auswirkungen einer Angebotsausweitung müssen der Umsatz- und der Kosteneffekt gegeneinander abgewogen werden: Wegen $p > 0$ wirkt sich der Umsatzeffekt positiv auf den

für alle α in der Nähe von α_0.

[5] Die Forderung $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} \neq 0$ wird klar, wenn man sich überlegt, was bei $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} = 0$ passiert: Dann gibt es in der Nähe von x^* Angebotsmengen, die den gleichen Gewinn erbringen wie x^*. Einem Wert des Preises p ist dann *nicht genau ein* Wert der gewinnmaximierenden Angebotsmenge sondern gleich *ein ganzes Intervall* solcher Angebotsmengen zugeordnet. Eine Funktion erfordert aber, dass jedem Wert der unabhängigen Variablen (hier: p) *genau ein* Wert der abhängigen Variablen (hier: x) zugeordnet wird.

Gewinn aus. Dieser Effekt spricht also *für* eine Erhöhung der Angebotsmenge. Im Gegensatz dazu verringern die zusätzlichen Kosten den Gewinn: Der Kosteneffekt spricht nicht nur *gegen* eine Ausweitung der Menge, sondern sogar für deren Verringerung, weil dadurch Kosten gespart und somit der Gewinn erhöht werden könnte. Die beiden in der Stationaritätsbedingung auftretenden Terme kann man also als mathematische Ausdrücke von Argumenten verstehen, die für oder gegen eine Mengenausweitung sprechen. Die Vertriebsabteilung der betrachteten Firma würde bei der Geschäftsleitung die zusätzlich erzielbaren Umsätze geltend machen, um für eine höhere Angebotsmenge zu plädieren. Die Abteilung Kostenrechnung würde hingegen auf die zusätzlichen Kosten einer solchen Expansion verweisen. Die Menge x^* ist gewissermaßen der Kompromiss zwischen solchen einander widersprechenden Partialargumenten: Bei x^* ist das 'Pro-Argument' gerade so stark wie das 'Kontra-Argument': $p = \frac{dC(x^*)}{dx}$.

Steigt in einer solchen Situation der Preis, dann stärkt dies zunächst die Pro-Seite, weil durch eine Mengenausweitung ein höherer Zusatzumsatz erzielt werden kann als vor der Preiserhöhung. Mit zunehmender Mengenausweitung wird die Kontra-Seite immer stärker, das Argument der Zusatzkosten fällt wegen $\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} > 0$ immer stärker ins Gewicht. So setzt sich zwar nach einer Preiserhöhung die Pro-Seite zunächst durch. Die Mengenausweitung geht aber nur so weit, bis die beiden Argumente wieder gleich stark sind.

2.2.4 Marginalbetrachtung von Vor- und Nachteilen

Diese anschauliche Interpretation der Optimalitätsbedingungen $p - \frac{dC(x^*)}{dx} = 0$ und $\frac{d^2C(x)}{dx^2}$ lässt sich in der Tat auf alle Arten von Optimierungsproblemen anwenden. Das ist auch gar nicht weiter überraschend, denn eingangs hatten wir die Ökonomie als die Wissenschaft definiert, die sich mit rationalem Handeln beschäftigt. Rational soll dabei bedeuten, dass das betreffende Handeln nach Abwägung aller wahrgenommenen Vor- und Nachteile der verfügbaren Handlungsoptionen zustande kommt.

Es verwundert daher nicht, dass diese Abwägung auch in unseren formalen Überlegungen ihren Ausdruck findet. Im vorliegenden Fall wird der Vorteil einer erhöhten Angebotsmenge durch den Preis, der Nachteil durch die Grenzkosten gemessen. Zwei Dinge sind dabei noch eigens hervor zu heben:

- Erstens zeigt sich, dass die Ökonomie den Ansatz der *Marginalbetrachtung* wählt, um Vor- und Nachteile gegenüber zu stellen. Anders als bei der Entscheidung, ob man seinen Urlaub in den Bergen oder am Meer verbringen soll, werden in Optimierungsansätzen Alternativen verglichen, die sich lediglich marginal von einander unterscheiden. Marginal meint dabei, dass die Unterschiede 'unendlich' klein, aber eben doch vorhanden sind. Dieser Ansatz, der im englischen Sprachgebrauch als '*marginalism*' bezeichnet wird, und der seinen Eingang in die deutschsprachige Nationalökonomie mit der sog. *Grenznutzenschule* fand, öffnet die ökonomische Analyse für die Anwendung der Instrumente der *Differential- und Integralrechnung*. Diese beiden Zweige der Mathematik werden auch unter dem Begriff *Infinitesimalrechnung*, d.h. der Rechnung mit unendlich kleinen Einheiten, zusammengefasst.

  Die Konsequenz dieses Ansatzes ist, dass Handlungsvariablen und Parameter in ökonomischen Modellen stets durch Variablen ausgedrückt werden müssen, die Werte innerhalb eines Intervalls der reellen Zahlen annehmen können. Dies scheint auf den ersten Blick eine Messbarkeit in Zahlen vorauszusetzen, was bei Mengen und Preisen unproblematisch ist. Mit welchem Instrument misst man aber 'Nutzen', 'Zufriedenheit' oder 'Gerechtigkeit'? Im Kapitel über den Zusammenhang zwischen Präferenzen und Nutzenfunktionen werden wir auf dieses Problem zurückkommen.

  Eine andere Schwierigkeit besteht darin, dass der Marginalansatz die Veränderbarkeit von Variablen und Parametern in unendlich kleinen Schritten voraussetzt. Die Grenzkosten $\frac{dC}{dx}$ geben beispielsweise die zusätzlichen Kosten einer unendlich kleinen Produktionsausweitung an. Nimmt man es wörtlich, dann geht es dabei um die Herstellung eines zusätzlichen Moleküls oder noch kleinerer Einheiten. Nun ist aber die Welt nicht in unendlich kleine Teile teilbar. Produktionsprozesse vollziehen sich in Schritten von je einer Einheit, wie klein diese Einheit auch immer sein mag. Und auch der Nutzen aus dem Konsum nimmt entgegen der Annahme eines positiven Grenznutzens nicht zu, wenn man die Suppe mit einem zusätzlichen Kochsalzmolekül würzt. Die Veränderungen endogener Größen, die auf Vor- und Nachteile zu überprüfen sind, um das Optimum zu identifizieren, vollziehen sich nicht stetig, sondern in diskreten Schritten.

Allerdings handelt es sich hier um ein Scheinproblem: Man könnte die gesuchte gewinnmaximierende Produktionsmenge ebenso gut definieren als x^* mit den Eigenschaften

$$p \cdot (x^* - 1) - C(x^* - 1) \; < \; p \cdot (x^*) - C(x^*)2 \tag{2.2.18}$$

und

$$p \cdot (x^* + 1) - C(x^* + 1) \quad < \quad p \cdot (x^*) - C(x^*). \tag{2.2.19}$$

Wir wollen nun kurz zeigen, dass sich auch aus diesen Bedingungen - wenn auch umständlich - ableiten lässt, dass die optimale Angebotsmenge im Preis zunimmt. Dazu betrachten wir zunächst (2.2.18). Wenn der Preis marginal zunimmt, steigt der Wert des Gewinns auf der linken Seite von (2.2.18) um $(x^* - 1)$, jener auf der rechten Seite dieser Ungleichung hingegen um x^*. Wegen $x^* > x^* - 1$ ist die Gewinnsteigerung der rechten Seite größer als jene auf der linken Seite von (2.2.18). Demzufolge bleibt der Gewinn aus der Menge x^* auch nach der Preiserhöhung größer als jener aus $x^* - 1$: Infolge einer Preiserhöhung geht die Angebotsmenge nicht zurück.

Kommen wir nun zu (2.2.19) und unterstellen wieder eine Preiserhöhung. Der Gewinnterm auf der rechten Seite steigt um $x^* + 1$, jener auf der rechten Seite lediglich um x^*. Somit führt eine hinreichend starke Preiserhöhung dazu, dass der Gewinn aus $x^* + 1$ größer wird, als jener aus x^*. Unter der Bedingung einer ausreichend starken Preiserhöhung wird die Angebotsmenge also um eine Einheit ausgedehnt. Damit ist gezeigt, dass die Aussage $\frac{dx^*}{dp} > 0$ mit geringen Modifikationen auch dann gilt, wenn die endogene Variable x nur in diskreten Schritten von ganzen Einheiten variiert werden kann. Man muss also die im Marginalansatz unterstellte stetige Variierbarkeit der Variablen und Parameter nicht als Versuch verstehen, die reale Welt zu beschreiben. Vielmehr handelt es sich um eine unrealistische aber für die Ergebnisse weitgehend folgenlose Annahme, die ein Zugeständnis an die Infinitesimalrechung darstellt.

- Die zweite Bemerkung, die zur Abwägung von Vor- und Nachteilen zu machen ist, bezieht sich auf die Frage, was als Vor- und was als Nachteil zu werten ist. Bei der Konstruktion ökonomischer Modelle geht man mit dieser Frage ganz pragmatisch um: Man ignoriert sie. Zu den Kernaussagen unseres einfachen Angebotsmodells zählt nicht, dass der durch eine Angebotsausweitung erzielbare zusätzliche Umsatz ein Vorteil *ist*. Im Gegensatz dazu besagt das Modell, dass, *wenn* die Angebotsentscheidung mit dem Ziel der Gewinnmaximierung getroffen wird, *dann* zusätzlich Umsätze als Vor- und zusätzliche Kosten als Nachteile betrachtet werden, die optimal gegeneinander abgewogen werden. Was Vor- und Nachteile sind, wird bereits mit der Formulierung der Zielfunktion (hier: Gewinnfunktion) und der Formulierung des Optimierungsproblems (hier: Maximierung) definiert. Diese beiden Hypothesen fallen nicht vom Himmel sondern sind Ausdruck eines außerhalb des Modell gewonnenen Vorverständnisses (man könnte auch sagen: Vorurteils) über die Interessen und Ziele der handelnden Entscheidungseinheiten. Alle aus diesen Annahmen abgeleiteten Aussagen stehen unter dem Vorbehalt der Gültigkeit dieser Annahmen: *Wenn* ein Unternehmen den Gewinn maximieren möchte, *dann* dehnt es bei einer Preiserhöhung seine Angebotsmenge aus. Damit ist an keiner Stelle behauptet, *dass* reale Unternehmen ihre Gewinne maximieren, obgleich natürlich zahlreiche Beobachtungen und auch theoretische Argumente dies zumindest plausibel erscheinen lassen.

Lassen Sie uns als methodische Fingerübung die folgende Überlegung anstellen:
Gegen die Annahme der Gewinnmaximierung könnte man einwenden, dass es doch durchaus Unternehmerpersönlichkeiten gebe (empirische Beobachtung), die sich auch bei ihrer Geschäftspolitik für die Erhaltung einer lebenswerten Umwelt verantwortlich fühlen. Demzufolge sei die Gewinnmaximierung nicht das ausschließliche Ziel solcher Unternehmer, die zusätzlich zu den Grenzkosten auch die zunehmende Umweltbelastung als Nachteil einer Produktionsausweitung bei ihren Entscheidungen Berücksichtigen.
Die Methode ökonomischer Modellbildung setzt uns keine Grenzen, auch dies ins Modell einzubauen: Wenn Unternehmen sich auch nach ökologischen Gesichtspunkten ausrichten, dann ist ihre Zielfunktion von der Art (kompliziertere Varianten sind immer möglich)

$$p \cdot x - C(x) - \alpha \cdot S(x). \tag{2.2.20}$$

Dabei sei $S(x)$ der von der Produktionsmenge x verursachte Umweltschaden. Es sei angenommen, dass zusätzliche Produktion zusätzliche Umweltschäden hervorruft: $\frac{dS(x)}{dx} > 0 \; \forall x$. Der Parameter $\alpha \geq 0$ gibt an, mit welchem Gewicht der Aspekt der Ökologie relativ zum Gewinnaspekt in die Unternehmensentscheidungen einfließt. Die Stationaritätsbedingung lautet nun

$$p - \frac{dC(x^*)}{dx} - \alpha \cdot \frac{dS(x^*)}{dx} = 0. \tag{2.2.21}$$

Um sicherzustellen, dass sich unter den Lösungen dieser Gleichung keine Terrassenpunkte befinden und um die Anwendbarkeit des IFT (die Existenz einer Funktion $x^*(p, \alpha)$ zu gewährleisten, brauchen wir zusätzlich

$$-\frac{d^2C(x^*)}{dx^2} - \alpha \cdot \frac{d^2S(x^*)}{dx^2} < 0. \tag{2.2.22}$$

Aus der Stationaritätsbedingung wird unmittelbar deutlich, dass ein umweltbewusster Unternehmer ($\alpha > 0$) die zusätzlichen Umweltbelastungen einer Produktionsausweitung als Nachteil in seiner Angebotsentscheidung berücksichtigt.
An die Formulierung der beiden obigen Bedingungen schliesst sich natürlich gleich eine Reihe von Fragen an: Wie unterscheidet sich die Angebotsmenge eines umweltbewussten Unternehmers ($\alpha > 0$) von jener eines strikt gewinnmaximierenden ($\alpha = 0$)? Wie unterscheiden sich die Reaktionen der beiden Unternehmertypen auf Preiserhöhungen?
Auf diese Fragen soll hier nicht weiter eingegangen werden, da es lediglich darum ging zu veranschaulichen, dass die Methode der Analyse ökonomischer Modelle in jeder Hinsicht offen ist in Bezug auf die Frage, welche Effekte als Vor- und welche als Nachteile gewertet werden. Ökonomen schreiben in ihren Modellen nicht vor, was als Vor- und was als Nachteil zu gelten hat, sondern sie untersuchen die Implikationen der Annahme, dass die Entscheidungsträger bestimmte Effekte als vorteilhaft, andere als nachteilig bewerten.

2.3 Ebenen der komparativ-statischen Analyse: Indirekte Zielfunktion und das Umhüllendentheorem

Ähnlich wie bei den Gleichgewichtsmodellen der ersten Kurseinheit gibt es auch bei Optimierungsmodellen zwei Ebenen der komparativ-statischen Analyse. In einem einfachen Modell des Marktgleichgewichts kann man auf der