Univ.-Prof. Dr. Rainer Baule

Modul 32831
Finanzwirtschaftliche Bewertungstheorie und Kreditrisikomanagement

Kurs 42310
Finanzwirtschaftliche Bewertungstheorie

Kurseinheit 4:
Optionen

LESEPROBE

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

4.2 Zeitdiskrete Bewertung

4.2.1 Einperioden-Binomialmodell

4.2.1.1 Duplikationsprinzip

Prozessannahme notwendig

Zur Bewertung von Optionen werden wir wieder das Duplikationsprinzip anwenden. Im Gegensatz zu Forwards und Futures müssen wir allerdings eine zusätzliche Annahme über das Verhalten des Underlying-Kurses treffen. Wir benötigen Informationen über die statistische **Verteilung** des Kurses bei Fälligkeit der Option bzw. über den **stochastischen Prozess**, dem das Underlying folgt.

Einfachster Prozess: zwei mögliche Endzustände

Zur Illustration des Bewertungsprinzips betrachten wir in diesem Abschnitt zunächst den einfachsten aller möglichen Prozesse. Bis zur Fälligkeit der Option seien nur zwei Kursbewegungen möglich: Entweder der Kurs steigt um einen Faktor u (für „up"-Faktor), oder er fällt mit einem Faktor d (für „down"-Faktor). Dies entspricht einer **Binomialverteilung** mit nur zwei möglichen Kursen[4] bei Optionsfälligkeit, nämlich $S_0 \cdot u$ und $S_0 \cdot d$, wobei S_0 den initialen Underlying-Kurs bezeichnet. Da die gesamte Laufzeit der Option als eine Periode aufgefasst wird, spricht man vom **Einperioden-Binomialmodell**.

Keine Wahrscheinlichkeiten benötigt

Zur Duplikation der Option müssen die Parameter u und d für die Aufwärts- bzw. Abwärtsbewegung bekannt sein. Hingegen benötigen wir *keine Informationen über die Wahrscheinlichkeit, mit der die beiden möglichen Zustände eintreten können!* Diese Aussage mag überraschen. Wir werden das Thema der Wahrscheinlichkeiten in Abschnitt 4.2.1.3 noch ausführlich diskutieren.

Fokus auf europäische Option auf dividendenlose Aktie

Des Weiteren unterstellen wir, dass das Underlying keinerlei Halteerträge (wie Dividenden- oder Kuponzahlungen oder etwa eine Convenience Yield) während der Laufzeit der Option generiert und auch keinerlei Haltekosten anfallen. Dies trifft insbesondere für eine dividendenlose Aktie zu, die wir im Weiteren betrachten. Wir bewerten eine *europäische Option*, also mit Ausübungsmöglichkeit nur bei Fälligkeit.

[4] Eine Binomialverteilung mit nur zwei möglichen Werten wird auch **Bernoulliverteilung** genannt. Mathematisch präzise ausgedrückt ist die *Anzahl* der Aufwärtsbewegungen binomialverteilt bzw. bernoulliverteilt.

Als Beispiel diene eine Kaufoption auf eine Aktie mit aktuellem Kurs $S_0 = 80$. Die Laufzeit der Option sei $T = 1$ Jahr. Die Aktie kann innerhalb dieser Periode entweder mit einem Faktor $u = 1{,}125$ auf

$$S_T^+ = S_0 \cdot u = 90$$

steigen oder mit einem Faktor $d = 0{,}875$ auf

$$S_T^- = S_0 \cdot d = 70$$

fallen. Der Basispreis der Option sei $X = 75$. Wie wir im Weiteren noch sehen, benötigen wir zusätzlich den risikofreien Zinssatz (über die Optionslaufzeit) – er betrage $r = 5\,\%$.

In Bezug auf die Kaufoption sind nun zwei Szenarien bei Fälligkeit denkbar (siehe Abbildung 4.7): Steigt der Aktienkurs auf 90, so ist die Option im Geld. Die Auszahlung f_T^+ beträgt $90 - 75 = 15$. Fällt der Aktienkurs auf 70, so ist die Option aus dem Geld. Die Auszahlung f_T^- beträgt 0.

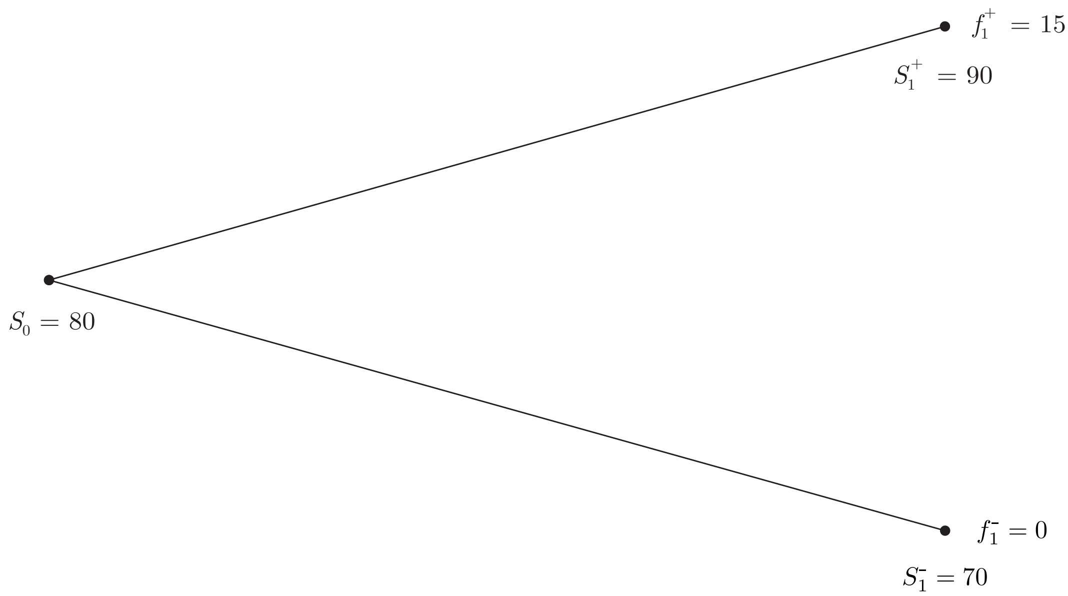

Abbildung 4.7. *Veranschaulichung des Einperioden-Binomialmodells mit Parametern* $S_0 = 80, u = 1{,}125$ *und* $d = 0{,}875$.

Unser Ziel ist es, diese Zahlungsstruktur exakt zu duplizieren. Hierzu stehen uns die zugrunde liegende Aktie sowie eine risikolose Geldaufnahme bzw. -anlage zur Verfügung. Letztere Möglichkeiten können wir als Zerobond mit Nominalwert ZB auffassen, der entweder gekauft wird (Geldanlage) oder verkauft wird (Geldaufnahme). Damit die Duplikation gelingt, müssen die Zahlungen aus dem Duplikationsportfolio in allen beiden möglichen Zuständen

Duplikation der Option mit Aktie und Zerobond identisch sein mit denen der Option. Ist also a die Anzahl der Aktien im Duplikationsportfolio (die positiv oder negativ sein kann), so muss gelten:

$$\begin{aligned} (i) \quad & a \cdot 90 + ZB = 15, \\ (ii) \quad & a \cdot 70 + ZB = 0. \end{aligned}$$

LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten

Wir haben also ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen (für die beiden möglichen Zustände) und zwei Unbekannten (die Anzahl Aktien a sowie der Nominalwert des Zerobonds ZB im Duplikationsportfolio). Dieses System können wir mit den Standardverfahren lösen; beispielsweise können wir Gleichung (ii) von Gleichung (i) abziehen:

$$a \cdot 20 = 15.$$

Hieraus folgt

$$a = 0{,}75.$$

Durch Einsetzen in (ii) erhalten wir

$$0{,}75 \cdot 70 + ZB = 0 \quad \Longrightarrow \quad ZB = -52{,}5.$$

Das Duplikationsportfolio besteht somit aus 0,75 Aktien sowie einer Geldaufnahme (negatives Vorzeichen des Zerobonds) mit Rückzahlungsbetrag 52,5.

Wir prüfen nach, dass das Duplikationsportfolio tatsächlich in beiden Zuständen eine zur Option identische Auszahlung generiert:

$$\begin{aligned} (i) \quad & 0{,}75 \cdot 90 - 52{,}5 = 15, \\ (ii) \quad & 0{,}75 \cdot 70 - 52{,}5 = 0. \end{aligned}$$

Wert Option gleich Wert Duplikationsportfolio

Nun können wir das zentrale Argument des Duplikationsprinzips anwenden: Da das Duplikationsportfolio und die Option in allen möglichen Zuständen (hier annahmegemäß genau zwei) identische Auszahlungen generieren, müssen sie auch denselben Wert aufweisen. Der Wert des Duplikationsportfolios ist aber einfach zu bestimmen: Wir kennen den Wert der Aktie in $t = 0$ (der Aktienkurs $S_0 = 80$), und wir können den Wert des Zerobonds durch Diskontieren mit dem risikofreien Zinssatz ermitteln. Es ergibt sich der Wert der Option f_0:

$$\begin{aligned} f_0 &= a \cdot S_0 + \frac{ZB}{(1+r)^T} \qquad (4.7) \\ &= 0{,}75 \cdot 80 - \frac{52{,}5}{1{,}05} \\ &= 10{,}0. \end{aligned}$$

Dieser Wert gilt unter unserer einfachen Verteilungsannahme mit zwei möglichen zukünftigen Aktienkursen. Allerdings haben wir an keiner Stelle in der Argumentation die Wahrscheinlichkeiten benötigt, mit denen die beiden Zustände eintreten. Insofern benötigen wir nicht die vollständige Information über die Verteilung – es genügen die beiden möglichen Aktienkurse bei Fälligkeit (bzw. die zugehörigen up- und down-Faktoren), ohne deren Eintrittswahrscheinlichkeiten zu kennen.

Keine Wahrscheinlichkeiten benötigt

4.2.1.2 Hedgingprinzip

Wir rollen die Bewertung nun noch einmal aus einer leicht geänderten Perspektive auf. Ausgangspunkt ist weiterhin das Einperioden-Binomialmodell. Anstelle einer Duplikation sei nun das Ziel, die bestehende Optionsposition zu **hedgen**, so dass das entstehende Portfolio aus Option und Hedge möglichst kein Risiko mehr aufweist.

Alternativer Bewertungsansatz

Als Hedgeinstrumente kommen nach wie vor grundsätzlich die Aktie sowie ein Zerobond in Frage. Kein Risiko bedeutet, dass das Gesamtportfolio in allen möglichen Zuständen – hier genau zwei – denselben Wert aufweist. Es sei wiederum a die Anzahl der Aktien und ZB der Nominalwert des Zerobonds. Da die Kaufoption und die Aktie tendenziell gleichgerichtet sind – beide profitieren von steigenden Aktienkursen –, gehen wir davon aus, dass wir zum Hedging der Option eine Short- bzw. Leerverkaufsposition in der Aktie eingehen müssen, also eine negative Anzahl $-a$. Im „up"-Zustand beträgt der Wert des Gesamtportfolios

Generierung eines risikolosen Portfolios

$$f_T^+ - a \cdot S_T^+ + ZB, \tag{4.8}$$

im „down"-Zustand

$$f_T^- - a \cdot S_T^- + ZB. \tag{4.9}$$

Für einen risikofreien Hedge muss gelten

$$f_T^+ - a \cdot S_T^+ + ZB = f_T^- - a \cdot S_T^- + ZB. \tag{4.10}$$

Offenbar spielt der Zerobond für den Hedge keine Rolle – unabhängig vom Zustand weist er immer denselben Rückzahlungsbetrag auf. Wir können daher auf den Zerobond verzichten und den Hedge ausschließlich auf Basis der Aktie aufbauen:

Risikoloses Portfolio aus Option und Aktie

$$f_T^+ - a \cdot S_T^+ = f_T^- - a \cdot S_T^-. \tag{4.11}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & f_T^+ - f_T^- = -a \cdot (S_T^- - S_T^+) \\ \Longrightarrow \quad & a = \frac{f_T^+ - f_T^-}{S_T^+ - S_T^-}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Hedge Ratio gleich Anzahl Aktien im risikolosen Portfolio

Diese Zahl wird **Hedge Ratio** genannt und üblicherweise mit Δ bezeichnet. Sie gibt die Anzahl an Aktien an, die man verkaufen muss, um eine bestehende Optionsposition *risikofrei zu stellen*. Im Falle einer Kaufoption besteht der Hedge also aus einer (Leer-)Verkaufsposition in

$$\Delta = \frac{f_T^+ - f_T^-}{S_T^+ - S_T^-}. \tag{4.13}$$

Aktien.

Wertbestimmung durch Diskontieren mit risikofreiem Zins

Wie kann nun diese Erkenntnis zur Bewertung der Option genutzt werden? Das zentrale Argument lautet: Da das Portfolio aus Optionsposition und Hedgeposition zusammen risikofrei ist, kann der Wert dieses Gesamtportfolios durch einfaches Diskontieren mit dem risikofreien Zinssatz ermittelt werden. Der Wert bzw. die Zahlung des Portfolios, bestehend aus einer Option, f_T, und $-\Delta$ Aktien, $-\Delta\, S_T$, beträgt

$$f_T - \Delta\, S_T = f_T^+ - \Delta \cdot S_T^+ = f_T^- - \Delta \cdot S_T^-. \tag{4.14}$$

Da dieses Portfolio wie dargelegt risikofrei ist, ergibt sich der Wert *des Gesamtportfolios* in $t = 0$ durch Diskontieren mit dem risikofreien Zinssatz:

$$f_0 - \Delta\, S_0 = \frac{f_T^+ - \Delta \cdot S_T^+}{(1+r)^T}. \tag{4.15}$$

In dieser Gleichung sind nun alle Größen außer dem gesuchten Optionswert f_0 bekannt. Durch Umstellen erhalten wir

$$f_0 = \frac{f_T^+ - \Delta \cdot S_T^+}{(1+r)^T} + \Delta\, S_0. \tag{4.16}$$

Im obigen Beispiel erhalten wir die Hedge Ratio zu

$$\Delta = \frac{15 - 0}{90 - 70} = 0{,}75.$$

Man beachte, dass Δ gerade der Anzahl Aktien im Duplikationsportfolio mit negativem Vorzeichen entspricht. Der Hedge besteht also aus 0,75 leerverkauften Aktien. Ein Portfolio aus der Kaufoption und 0,75 leerverkauften Aktien ist risikofrei. In beiden Situation ist der Wert bei Fälligkeit identisch: entweder

$$15 - 0{,}75 \cdot 90 = -52{,}5$$

oder

$$0 - 0{,}75 \cdot 70 = -52{,}5.$$

Für den Wert der Option in $t = 0$ erhalten wir

$$f_0 = \frac{15 - 0{,}75 \cdot 90}{1{,}05} + 0{,}75 \cdot 80 = 10{,}0.$$

4.2.1.3 Prinzip der risikoneutralen Bewertung

Das Hedgingprinzip liefert die Grundlage für ein weiteres Bewertungsprinzip, dessen Bedeutung aufgrund seiner allgemeinen Anwendbarkeit kaum überschätzt werden kann: das Prinzip der risikoneutralen Bewertung. Die Argumentation dieses Prinzips ist wie folgt:

- Das Risiko einer Option kann durch Portfoliobildung (zusammen mit Hedgeinstrumenten) vollständig eliminiert werden.
- Es ist daher für die Bewertung unerheblich, welche Risikoeinstellung die Marktteilnehmer haben (wie stark risikoavers sie sind).
- Zu Bewertungszwecken können wir somit irgendeine beliebige Risikoeinstellung der Marktteilnehmer unterstellen – für den Wert der Option spielt das keine Rolle.
- Wir unterstellen eine **risikoneutrale Welt** als einfachste aller denkbaren Risikoeinstellungen, also eine Welt, in der alle Marktteilnehmer risikoneutral sind. (Wir wissen, dass diese Annahme von der Realität abweicht. Wir können aber trotzdem zu Bewertungszwecken diese Annahme treffen, da der Wert der Option ja hiervon unabhängig ist. Insbesondere gilt der Wert der Option unter dieser bewusst falschen Annahme auch in der realen Welt mit risikoaversen Marktteilnehmern.)

Annahme der Risikoneutralität, da Risikoeinstellung für Wert unerheblich

Wir tun also so, als seien alle Marktteilnehmer risikoneutral. Das bedeutet, sie orientieren sich ausschließlich am Erwartungswert einer Investition, nicht am Risiko. Das wiederum hat zur Folge, dass die erwartete Rendite aller Investitionen gleich dem risikofreien Zinssatz sein muss. Denn wäre dies nicht so, hätte etwa eine Investition eine höhere erwartete Rendite, so würden alle Marktteilnehmer diese Investition gegenüber der risikofreien Anlage bevorzugen und nachfragen, so dass der Preis so lange stiege, bis die erwartete Rendite gleich dem risikofreien Zinssatz ist.

Erwartete Rendite jeder Anlage gleich dem risikofreien Zins

Was bedeutet diese Annahme einer fiktiven risikoneutralen Welt nun für die Bewertung einer Option? Gemäß der Argumentation muss auch die erwartete Rendite der zugrunde liegenden Aktie gleich dem risikofreien Zinssatz sein. Der *risikoneutrale* Erwartungswert des Aktienkurses bei Fälligkeit beläuft sich auf

Erwartungswert der Aktie durch Aufzinsen mit risikofreiem Zins

$$E_Q[S_T] = S_0 \cdot (1+r)^T. \tag{4.17}$$

Die Tatsache, dass dieser Erwartungswert nicht in der realen Welt gilt, sondern in der risikoneutralen Welt, wird durch den Index $_Q$ angedeutet.[5]

Fiktive Wahrscheinlichkeiten in risikoneutraler Welt

Hieraus lassen sich (in der risikoneutralen Welt gültige) Wahrscheinlichkeiten für die beiden Zustände S_T^+ und S_T^- ableiten: Sei q die Wahrscheinlichkeit (in der risikoneutralen Welt), dass der höhere Aktienkurs S_T^+ eintritt, so ist $1-q$ die Wahrscheinlichkeit (in der risikoneutralen Welt) für S_T^-, und es gilt

$$E_Q[S_T] = q \cdot S_T^+ + (1-q) \cdot S_T^-. \tag{4.18}$$

Durch Gleichsetzen von (4.17) und (4.18) folgt:

$$\begin{aligned} & q \cdot S_T^+ + (1-q) \cdot S_T^- = S_0 \cdot (1+r)^T \\ \Longrightarrow\quad & q \cdot (S_T^+ - S_T^-) = S_0 \cdot (1+r)^T - S_T^- \\ \Longrightarrow\quad & q = \frac{S_0 \cdot (1+r)^T - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Diese in der risikoneutralen Welt gültige Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung der Aktie wird **risikoneutrale Wahrscheinlichkeit** genannt.

Da $S_T^+ = S_0 \cdot u$ und $S_T^- = S_0 \cdot d$ gilt, können wir die Gleichung unabhängig vom Aktienkurs S_0 schreiben:

$$\begin{aligned} q &= \frac{S_0 \cdot (1+r)^T - S_0 \cdot d}{S_0 \cdot u - S_0 \cdot d} \\ &= \frac{(1+r)^T - d}{u-d}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Diese Form wird sich bei der Betrachtung des Mehrperioden-Binomialmodells in Abschnitt 4.2.2 als nützlich erweisen.

Die Aussage, dass die erwartete Rendite aller Investitionen gleich dem risikofreien Zinssatz sein muss, gilt auch für die zu bewertende Option. Die erwarte-

[5] Die Wahl dieses Symbols erklärt sich vor dem Hintergrund, dass Wahrscheinlichkeiten in der realen Welt häufig mit P oder p für englisch probability bezeichnet werden. Für Wahrscheinlichkeiten in der risikoneutralen Welt wurde daher pragmatisch der nachfolgende Buchstabe Q bzw. q gewählt.

te Auszahlung $E_Q[f_T]$ einer Investition in die Option (mit noch unbekanntem Wert f_0) ergibt sich also aus einer Rendite gleich dem risikolosen Zinssatz:

$$E_Q[f_T] = f_0 \cdot (1+r)^T. \tag{4.21}$$

Für den Optionswert gilt demnach

$$f_0 = \frac{E_Q[f_T]}{(1+r)^T}. \tag{4.22}$$

Erwartete Auszahlung über risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

In Kenntnis der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten für die Aktienkursbewegungen können wir die erwartete Auszahlung der Option bei Fälligkeit und damit auch die erwartete Rendite – alles in der risikoneutralen Welt – bestimmen: Mit (risikoneutraler) Wahrscheinlichkeit q steigt die Aktie, und die Auszahlung der Option beträgt f_T^+. Mit (risikoneutraler) Wahrscheinlichkeit $1-q$ fällt die Aktie, und die Auszahlung der Option beträgt f_T^-. Somit beträgt die erwartete Auszahlung

$$E_Q[\pi_T] = q \cdot f_T^+ + (1-q) \cdot f_T^-. \tag{4.23}$$

Durch Einsetzen in die allgemeine Gleichung (4.22) erhalten wir:

$$f_0 = \frac{q \cdot f_T^+ + (1-q) \cdot f_T^-}{(1+r)^T}. \tag{4.24}$$

Im obigen Beispiel beträgt die risikoneutrale „up"-Wahrscheinlichkeit

$$q = \frac{80 \cdot 1{,}05 - 70}{90 - 70} = 0{,}7,$$

die risikoneutrale „down"-Wahrscheinlichkeit entsprechend 0,3.

Der Optionswert ergibt sich zu

$$f_0 = \frac{0{,}7 \cdot 15 + 0{,}3 \cdot 0}{1{,}05} = 10{,}0.$$

Duplikationsprinzip, Hedgingprinzip und risikoneutrale Bewertung führen zu identischem Ergebnis

Wie man sieht, stimmt der Optionswert mit den gemäß Duplikations- und Hedgingprinzip ermittelten Werten, für die keinerlei Risikoneutralitätsannahmen getroffen wurden, überein. Dies ist konsistent mit unseren Überlegungen, denen zufolge die Risikoneutralitätsannahme für den Wert der Option unerheblich ist. Es ist extrem wichtig festzuhalten:

> Der mithilfe des Prinzips der risikoneutralen Bewertung ermittelte Wert einer Option gilt auch in der realen Welt mit risikoaversen (und heterogenen) Marktteilnehmern.

Die Risikoneutralitätsannahme ist also keineswegs eine Einschränkung. Wir unterstellen nicht, dass die Marktteilnehmer tatsächlich risikoneutral sind. Wir tun nur so, also ob sie es wären, um die Bewertung zu vereinfachen, wohl wissend, dass das Ergebnis dieser Bewertung auch bei Fallenlassen der Risikoneutralitätsannahme Bestand hat.

Voraussetzung: Bildung des risikolosen Portfolios möglich

Wie insbesondere das Beispiel zeigt, wird die Bewertung mithilfe des Prinzips sehr einfach, sobald die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelt sind. Zur Anwendung des Prinzips war eine zentrale Feststellung notwendig: Durch Portfoliobildung kann das Risiko der Option vollständig eliminiert werden. Sobald diese Möglichkeit gegeben ist, hat Gleichung (4.22) Bestand. Sie beinhaltet die Kernaussage des Prinzips der risikoneutralen Bewertung:

> Der Wert einer Option entspricht ihrer erwarteten Auszahlung in der risikoneutralen Welt, diskontiert mit dem risikofreien Zinssatz.

Prinzip auf alle europäischen Optionen anwendbar

Die Möglichkeit der Risikoeliminierung haben wir zunächst nur für das Einperioden-Binomialmodell gezeigt. An die spezielle Art der Option haben wir jedoch keine Anforderungen gestellt, abgesehen davon, dass es einen festen Auszahlungszeitpunkt T gibt, dass es sich also um eine europäische Option handelt. Die Überlegungen gelten für beliebige Auszahlungsprofile $(f_T^+; f_T^-)$, insbesondere also auch für (europäische) Put-Optionen.

Wie wir in nachfolgenden Abschnitten sehen werden, ist die Möglichkeit der Risikoeliminierung auch in komplexeren Modellen sowie auch für amerikanische Optionen gegeben (wobei dann allerdings eine zwischenzeitliche Anpassung des Hedgeportfolios erforderlich ist). Durch diese in einer großen Modellklasse vorhandene grundsätzliche Möglichkeit der Risikoeliminierung wird das Prinzip der risikoneutralen Bewertung zu einem sehr mächtigen Werkzeug.

4.2.1.4 Arbitragestrategien

Ausnutzen von Fehlbewertungen

Gemäß unseren Überlegungen muss sich auf einem vollkommenen Markt *bei Gültigkeit der Prozessannahme* (also im Einperioden-Binomialmodell) der berechnete Optionspreis einstellen, da anderenfalls **Arbitrage** möglich wäre. Wie würde eine solche Arbitragestrategie aussehen? Das Grundprinzip einer Arbitragestrategie ist immer dasselbe:

- Falls der angebotene Preis *niedriger* als der theoretische Wert ist: Kaufe die Option zum angebotenen niedrigen Preis und verkaufe das Duplikationsportfolio.

- Falls der angebotene Preis *höher* als der theoretische Wert ist: Verkaufe die Option zum angebotenen hohen Preis und kaufe das Duplikationsportfolio.

Nehmen wir an, im obigen Beispiel wird uns die Option anstelle zum theoretischen Wert von 10,0 zum Preis von 9,0 angeboten. Das Duplikationsportfolio bestand aus 0,75 Aktien (Kurs $S_0 = 80$) und einem Zerobond im Nominalwert von $-52{,}5$ (negatives Vorzeichen, also Short-Position bzw. Geldaufnahme).

Da der Angebotspreis unter dem theoretischen Wert liegt, kaufen wir die Option und verkaufen das Duplikationsportfolio:

- Kauf Option: (Aus-)Zahlung $-9{,}0$.
- (Leer-)Verkauf 0,75 Aktien: (Ein-)Zahlung $+0{,}75 \cdot 80 = +60$.
- Kauf Zerobond: (Aus-)Zahlung $-52{,}5/1{,}05 = -50$.

Per Saldo ergibt sich eine positive Zahlung in Höhe von $-9{,}0+60{,}0-50{,}0 = +1{,}0$.

Nun müssen wir sicherstellen, dass zu keinem zukünftigen Zeitpunkt eine negative Zahlung resultiert. Hierzu müssen wir alle möglichen Aktienkurse bei Fälligkeit in $T = 1$ betrachten – im Einperioden-Binomialmodell genau zwei:

- Der Aktienkurs steigt auf $S_1^+ = 90$.
  - Ausübung der Option zum Basispreis 75: (Ein-)Zahlung $90 - 75 = +15$.
  - (Rück-)Kauf der leerverkauften 0,75 Aktien: (Aus-)Zahlung $-0{,}75 \cdot 90 = -67{,}5$.
  - (Ein-)Zahlung des Zerobonds: $+52{,}5$

  $\Longrightarrow$ Saldo: $+15 - 67{,}5 + 52{,}5 = 0$
- Der Aktienkurs fällt auf $S_1^- = 70$.
  - Option verfällt ohne Zahlungskonsequenzen.

– (Rück-)Kauf der leerverkauften 0,75 Aktien: (Aus-)Zahlung $-0{,}75 \cdot 70 = -52{,}5$.

– (Ein-)Zahlung des Zerobonds: $+52{,}5$

$\Longrightarrow$ Saldo: $-52{,}5 + 52{,}5 = 0$

Somit generiert die Arbitragestrategie einen sicheren Gewinn von 1 in $t = 0$ (dies entspricht gerade der Differenz aus Angebotspreis und theoretischem Wert), und in keiner Situation fällt zu einem zukünftigen Zeitpunkt eine Auszahlung an. Das Arbitragetableau ist in nachfolgender Tabelle noch einmal zusammengefasst.

	$t = 0$	$t = 1$	
		$S_1 = 90$	$S_1 = 70$
Kauf Option	-9	$+15$	0
Verkauf 0,75 Aktien	$+60$	$-67{,}5$	$-52{,}5$
Kauf Zerobond	-50	$+52{,}5$	$+52{,}5$
Saldo	$+1$	0	0

4.2.2 Mehrperioden-Binomialmodell

4.2.2.1 Europäische Option im Zweiperioden-Binomialmodell

Realistisches Modell mit mehr als zwei Zuständen

Nun ist die Prozessannahme des Einperioden-Binomialmodells nicht sonderlich realistisch. Der Aktienkurs wird aufgrund einer Vielzahl von Kursbewegungen bei Optionsfälligkeit nicht nur zwei, sondern eine ganze Reihe möglicher Werte annehmen können. Um zu einer realitätsnäheren Betrachtung zu kommen, erweitern wir das Modell zu einem **Mehrperiodenmodell**. In jeder (Teil-)Periode sind nach wie vor nur zwei Bewegungen – aufwärts oder abwärts – möglich; aber durch die Aneinanderreihung vieler solcher Teilperioden wird eine realistischere Modellierung möglich.

Um das Prinzip zu veranschaulichen, betrachten wir zunächst ein **Zweiperioden-Binomialmodell**. Hierzu wird die Optionslaufzeit T aufgeteilt in zwei Perioden der gleichen Länge $T/2$. In jeder der Perioden kann der Kurs der zugrunde liegenden Aktie jeweils entweder um den Faktor u steigen oder um den Faktor d fallen. Die Situation ist in Abbildung 4.8 veranschaulicht. Aufgrund der mehrfachen Verzweigung spricht man auch von einem **Binomialbaum**.

Univ.-Prof. Dr. Rainer Baule

Modul 32831 Finanzwirtschaftliche Bewertungstheorie und Kreditrisikomanagement

Kurs 42311
Kreditrisikomanagement

Kurseinheit 1:
Messung und Steuerung von
Kreditrisiken auf Einzelgeschäftsebene

LESEPROBE

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

1.4 Unternehmenswertmodelle zur Kreditbewertung

1.4.1 Das Merton-Modell

1.4.1.1 Grundidee des Modells

Im letzten Abschnitt ist deutlich geworden, dass sich die Bonitätsprämie und damit der Credit Spread nicht ohne Weiteres aus der Ausfallwahrscheinlichkeit (und der Rückzahlungsquote) berechnen lässt, da der Credit Spread auch von der Risikoaversion am Markt maßgeblich beeinflusst wird. In diesem Abschnitt gehen wir einen anderen Weg mit dem Ziel der Bestimmung des Credit Spread. Hierzu betrachten wir einen modelltheoretischen Ansatz, der den Ausfall eines Unternehmens modelliert, ohne dass die Ausfallwahrscheinlichkeit oder ein Rating exogen bekannt sein muss.

Ziel: Modelltheoretische Bestimmung des Credit Spread

Die Idee dieses modelltheoretischen Ansatzes besteht darin, den Ausfall über die Entwicklung der **Unternehmensaktiva** (also des Vermögens bzw. des Unternehmenswertes) zu erklären. Dabei wird auf den Tatbestand der Überschuldung abgestellt: Der Ausfall tritt ein, wenn das Vermögen (also der Wert der Unternehmensaktiva) geringer ist als die Schulden.

Ausfall bei Überschuldung

Für die Entwicklung der Unternehmensaktiva wird dabei ein **stochastischer Prozess** unterstellt. Das bedeutet, diese Entwicklung ist zufällig, folgt aber bestimmten statistischen Vorschriften. Zusammenfassend lässt sich die Idee eines **Unternehmenswertmodells** zur Kreditbewertung wie folgt darstellen:

Unternehmenswert folgt stochastischem Prozess

- Der Ausfall wird durch den Wert der Unternehmensaktiva bestimmt.
- Der Wert der Unternehmensaktiva folgt einem stochastischen Prozess.
- Ist der Wert der Unternehmensaktiva kleiner als das nominale Fremdkapital, fällt das Unternehmen aus.

Die Idee der Unternehmenswertmodelle geht zurück auf Merton (1974).[29] In seinem grundlegenden Ansatz hat Merton die Modellierung hinsichtlich der

[29] Die Modelle werden daher auch Merton-Modelle genannt. Im englischen Sprachraum sind die Bezeichnungen firm-value model, asset-value model und Merton-style model gebräuchlich.

Fremdkapitalstruktur des Unternehmens sowie des stochastischen Prozesses konkretisiert. Für die Fremdkapitalstruktur gilt:

Fremdkapital besteht aus einfachem Zerobond

- Es wird die einfachstmögliche Situation unterstellt: Das Unternehmen hat einen einzigen Zerobond begeben (bzw. einen endfälligen Kredit ohne zwischenzeitliche Zins- oder Tilgungszahlungen aufgenommen).
- Ist der Wert der Unternehmensaktiva bei Fälligkeit des Zerobonds größer als dessen Nominalwert, so wird der Zerobond aus dem Unternehmensvermögen getilgt.
- Ist der Wert hingegen geringer, so fällt das Unternehmen aus, und die Unternehmensaktiva gehen an die Fremdkapitalgeber über.

Friktionsloser Übergang des Unternehmens an Fremdkapitalgeber bei Ausfall

Der dritte Punkt ist entscheidend für das Modellverständnis. Tritt der Ausfall ein, erhalten die Fremdkapitalgeber nicht wie versprochen den Nominalwert des Zerobonds zurück, sondern bekommen das, was an Unternehmenswert noch übrig bleibt. In der Praxis würde ein Insolvenzverwalter das verbleibende Unternehmensvermögen (also die Aktiva) liquidieren und den Erlös an die Fremdkapitalgeber auszahlen. Im Modell wird unterstellt, dass dieser Prozess **ohne Friktionen** abläuft. Das bedeutet, dass keine Preisabschläge bei der Liquidation hinzunehmen sind, dass keine Kosten für den Insolvenzverwalter und dessen Tätigkeit anfallen, und dass keine zeitliche Verzögerung bei der Liquidation auftritt. Diese Annahme stellt natürlich eine starke Vereinfachung der Realität dar und wird in der Modellanalyse bzw. -kritik noch zu würdigen sein.

Marktwert der Aktiva bestimmt Ausfall

Die Situation bei Fälligkeit des Zerobonds kann anhand einer stilisierten **Bilanz nach Marktwerten** veranschaulicht werden (vgl. Abbildung 1.18). Wichtig ist hierbei der Zusatz *nach Marktwerten*: Es handelt sich nicht um Buchwerte der Aktiva, sondern um deren Werte *auf einem vollkommenen Markt*. Die Bedeutung dieser Annahme wird klar, wenn man sich vor Augen hält, dass die Fremdkapitalgeber *aus dem Vermögen des Unternehmens* bezahlt werden. Es werden hierzu Vermögensgegenstände (also Aktiva) auf dem vollkommenen Markt ohne Friktionen verkauft, um mit dem Erlös die Fremdkapitalgeber zu bedienen. Der Erlös entspricht dem Marktwert – genau dann also, wenn der Marktwert der Aktiva größer (oder gleich) als der zurückzuzahlende Nominalwert des Zerobonds ist, kann diese Rückzahlung ordnungsgemäß erfolgen, und es tritt kein Ausfall ein.

Aus den Modellannahmen lassen sich **Rückzahlungen** an die Eigenkapitalgeber sowie die Fremdkapitalgeber bei Ausfall und bei Nicht-Ausfall ableiten.

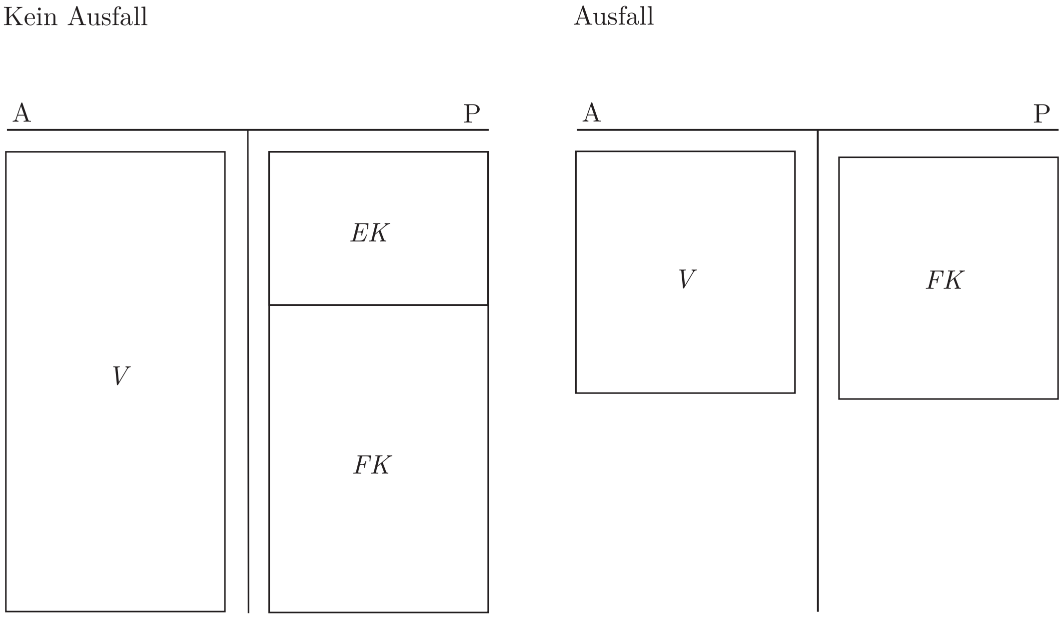

Abbildung 1.18. *Bilanz nach Marktwerten bei Ausfall und Nicht-Ausfall im Merton-Modell.*

(Dabei kann gedanklich unterstellt werden, dass das Unternehmen nach Rückzahlung des Fremdkapitals liquidiert wird.) Es sei V_T der Unternehmenswert bei Fälligkeit T des Zerobonds mit Nominalwert NW.

- Kein Ausfall tritt ein, wenn der Unternehmenswert größer ist als der Nominalwert des Zerobonds, also wenn $V_T \geq NW$. Dann wird der Zerobond ordnungsgemäß zurückgezahlt, und die Fremdkapitalgeber erhalten den Betrag NW. Die Eigenkapitalgeber erhalten den Rest, also $V_T - NW$.
- Der Ausfall tritt ein, wenn der Unternehmenswert kleiner ist als der Nominalwert des Zerobonds, also wenn $V_T < NW$. Dann übertragen die Eigenkapitalgeber anstelle einer ordnungsgemäßen Rückzahlung des Zerobonds das Unternehmen (bzw. deren Aktiva) an die Fremdkapitalgeber. Diese erhalten also V_T. Die Eigenkapitalgeber gehen leer aus, erhalten also 0.

Die Situation ist anhand von Tabelle 1.9 noch einmal dargestellt.

In Abbildung 1.19 sind die Rückzahlungsprofile grafisch dargestellt.

	$V_T \geq NW$	$V_T < NW$
	Kein Ausfall	Ausfall
Eigenkapitalgeber	$V_T - NW$	0
Fremdkapitalgeber	NW	V_T

Tabelle 1.9. *Rückzahlungen im Merton-Modell.*

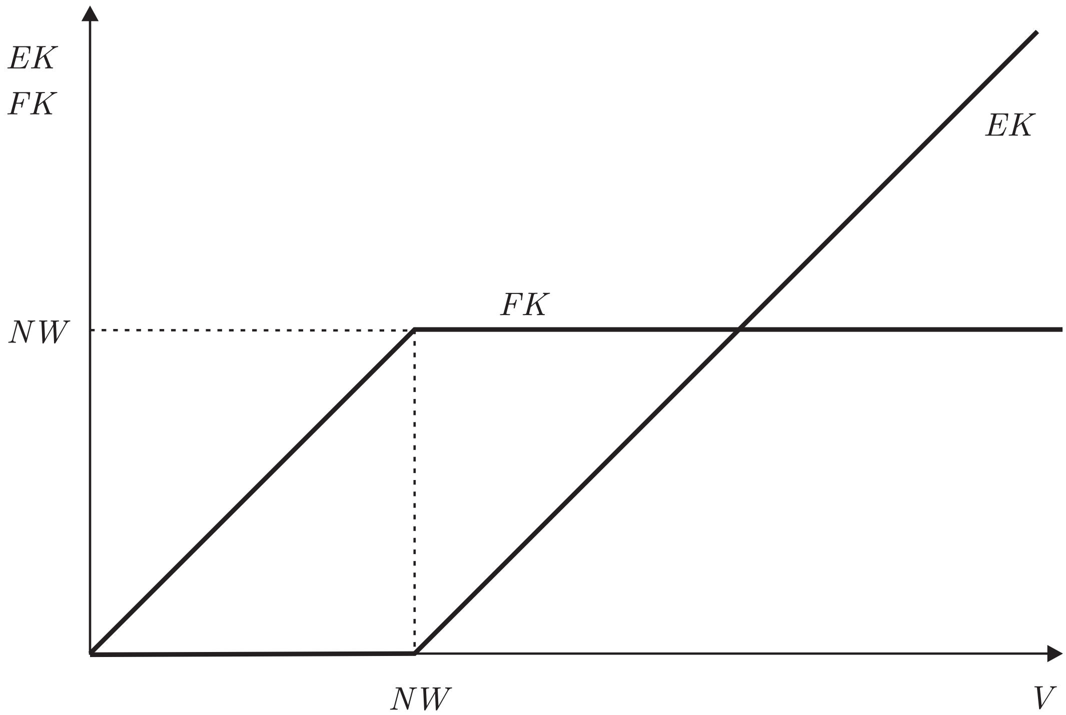

Abbildung 1.19. *Rückzahlungsprofile für Eigen- und Fremdkapital im Merton-Modell.*

1.4.1.2 Optionstheoretische Interpretation

Call-Variante

Die Situation lässt eine **optionstheoretische Interpretation** zu. Wie wir sehen werden, sind es sogar zwei alternative, aber äquivalente Interpretationen. Wir betrachten zunächst die *Call-Variante*:

FK-Geber sind Eigentümer

In der Call-Variante sind die Fremdkapitalgeber gedanklich die Eigentümer des Unternehmens. Die Eigenkapitalgeber haben jedoch das Recht, den Fremdkapitalgebern das Unternehmen abzukaufen, indem sie den Zerobond ordnungsgemäß zurückzahlen.

Dieses Recht entspricht einer **europäischen Kaufoption**. Underlying der Kaufoption ist *das Unternehmen als Ganzes* (bzw. sind die Aktiva). Basispreis ist der Nominalwert des Zerobonds, und die Fälligkeit der Option entspricht der des Zerobonds.

Gemäß dieser Interpretation stellt der Eigenkapitalkontrakt eine Kaufoption (einen Call) dar. Die Eigenkapitalgeber werden die Option ausüben, wenn sie im Geld ist, wenn also $V_T \geq NW$ – sie zahlen den Basispreis NW an die Fremdkapitalgeber und erhalten dafür das Unternehmen. Ist die Option bei Fälligkeit hingegen nicht im Geld, wenn also $V_T < NW$, lassen die Eigenkapitalgeber die Option verfallen – sie bezahlen die Fremdkapitalgeber nicht, und Letztere behalten das Unternehmen, dessen Eigentümer sie ja bereits sind.

Eigenkapital ist Kaufoption auf das Unternehmen

Diese Interpretation sollte man in Ruhe auf sich wirken lassen. Sie mag auf den ersten Blick etwas seltsam erscheinen – wieso sollten die Fremdkapitalgeber Eigentümer des Unternehmens sein? Aber so weit hergeholt ist die Interpretation gar nicht. Wenn jemand ein Haus gebaut und durch einen Bankkredit finanziert hat, fällt häufig der Satz: „Das Haus gehört mir gar nicht – das Haus gehört (noch) der Bank!". Ein solcher Bauherr findet dieselbe Interpretation: Das Haus gehört den Fremdkapitalgebern, und er hat die Option, durch Tilgung des Kredites das Haus von den Fremdkapitalgebern (der Bank) zu erwerben.[30]

Put-Variante

In einer alternativen optionstheoretischen Interpretation sind die Eigenkapitalgeber Eigentümer des Unternehmens und schulden den Fremdkapitalgebern die Rückzahlung des Zerobonds. Sie haben aber das Recht, den Fremdkapitalgebern anstelle der Rückzahlung das Unternehmen zu überlassen.

EK-Geber sind Eigentümer

Dieses Recht kann als **europäische Verkaufoption** interpretiert werden: Die Überlassung des Unternehmens anstelle der Rückzahlung des Zerobonds entspricht dem *Verkauf des Unternehmens zum Preis des Zerobonds*. Die Fremdkapitalgeber zahlen einen Betrag in Höhe des Nominalwerts des Zerobonds – wobei sich diese Zahlung mit der vertraglichen Rückzahlung des Zerobonds seitens der Eigenkapitalgeber aufhebt, so dass per Saldo keine Zahlung erfolgt – und erhalten dafür das Unternehmen.

[30] Im Gegensatz zu einem Unternehmen mit beschränkter Haftung ist der Bauherr natürlich verpflichtet, den Kredit auch dann zu tilgen, wenn das Underlying der „Option" – das Haus – durch äußere Umstände einen Wertverlust unter die zu tilgende Kreditschuld erlitten haben sollte.

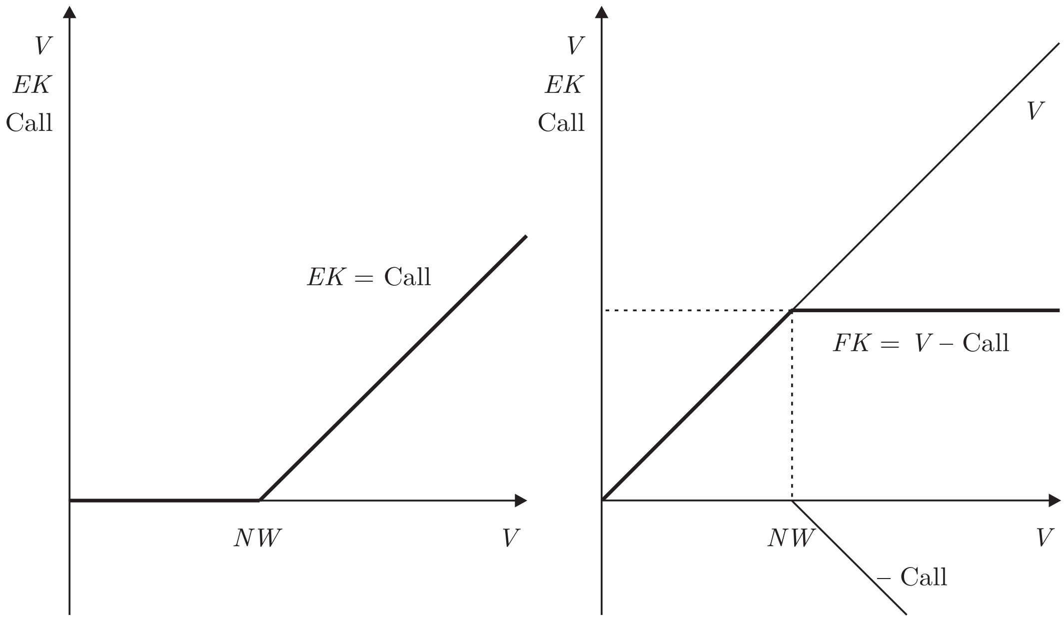

Abbildung 1.20. *Interpretation des Merton-Modells über eine europäische Call-Option (Payoff-Diagramm).*

Eigenkapital beinhaltet Verkaufoption auf das Unternehmen

Dabei entscheiden die Eigenkapitalgeber, ob der Verkauf erfolgt. Sie besitzen demnach die Long-Position in einer Verkaufoption (einem Put), die es ihnen ermöglicht, den Fremdkapitalgebern das Unternehmen zum Preis des Zerobonds anzudienen. Sie werden diese Option ausüben, wenn der Wert des Unternehmens (des Underlyings der Option) unterhalb des Nominalwerts des Zerobonds (des Basispreises der Option) liegt – also wenn der Ausfall eintritt.

Gemäß dieser Interpretation setzt sich die Position der Eigenkapitalgeber zusammen aus dem Unternehmen V, einem verkauften *ausfallrisikofreien* Zerobond ZB mit Nominalwert NW und einem Long Put auf das Unternehmen mit Basispreis NW. Der Zerobond ist in dieser Betrachtung ausfallrisikofrei, da er in jedem Fall zurückgezahlt wird – allerdings wird bei Ausfall des Unternehmens (also wenn $V_T < NW$) die Put-Option ausgeübt, die die Fremdkapitalgeber zu einer Zahlung in gleicher Höhe verpflichtet, so dass sie per Saldo dann keine Zahlung erhalten.

Fremdkapital beinhaltet Short Put auf das Unternehmen

Die Fremdkapitalgeber besitzen einen ausfallrisikofreien Zerobond und zusätzlich die Stillhalterposition (Short-Position) in der Put-Option. Bei Nicht-Ausfall (also wenn $V_T \geq NW$) lassen die Eigenkapitalgeber die Option verfallen und behalten das Unternehmen mit Wert V_T, und die Fremdkapitalgeber erhalten die vereinbarte Rückzahlung NW. Bei Ausfall (also wenn $V_T < NW$) üben die Eigenkapitalgeber die Option aus und verkaufen das Unternehmen zum Preis NW an die Fremdkapitalgeber. Gleichzeitig zahlen sie den Zerobond zurück, behalten per Saldo also 0. Die Fremdkapitalgeber erhalten die Rückzahlung des Zerobonds, müssen aber gleichzeitig den Preis NW zum Kauf des Unternehmens zahlen. Per Saldo resultiert der Erhalt des Unternehmen mit Wert V_T ohne weitere Zahlungen.

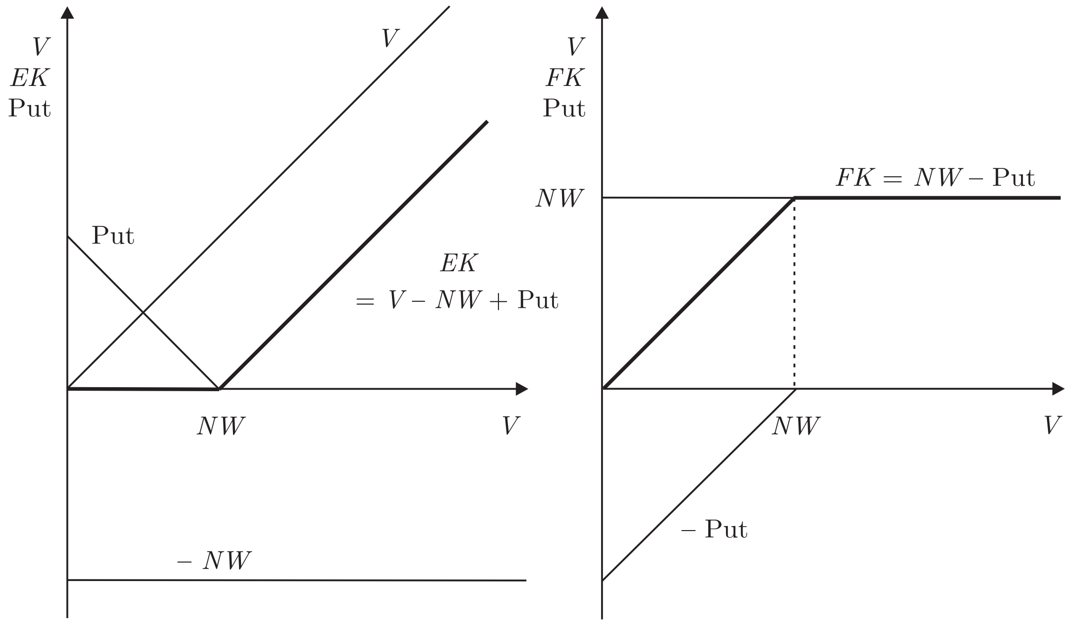

Abbildung 1.21. *Interpretation des Merton-Modells über eine europäische Put-Option (Payoff-Diagramm).*

Zusammenführung beider Interpretationen

Beide Interpretationen – die Call-Variante und die Put-Variante – sind logisch schlüssig und beschreiben denselben Sachverhalt. In Tabelle 1.10 sind die Positionen von Eigen- und Fremdkapitalgebern in beiden Varianten noch einmal zusammengefasst.

	Call-Variante	Put-Variante
Eigenkapitalgeber	Call	$V - ZB + \text{Put}$
Fremdkapitalgeber	$V - \text{Call}$	$ZB - \text{Put}$

Tabelle 1.10. *Positionen von Eigen- und Fremdkapitalgebern im Merton-Modell.*

Der Zusammenhang beider Interpretationen wird über die **Put-Call-Parität** deutlich:[31] Da beide Interpretationen richtig sind, muss für die Eigenkapitalgeber gelten

$$\text{Call} = V - ZB + \text{Put}, \tag{1.84}$$

und für die Fremdkapitalgeber

$$V - \text{Call} = ZB - \text{Put}. \tag{1.85}$$

Beide Gleichungen folgen unmittelbar aus der Put-Call-Parität.

1.4.1.3 Berechnung der Bonitätsprämie

Aus der Interpretation der Fremdkapitalposition in der Put-Variante lässt sich eine bemerkenswerte Schlussfolgerung ziehen. Die Position der Fremdkapitalgeber (die in Summe ja einen ausfallrisikobehafteten Zerobond ZB^* besitzen) setzt sich zusammen aus einem ausfallrisikofreien Zerobond ZB und einer Short-Position in einem Put auf das Unternehmen:

$$ZB^* = ZB - \text{Put}. \tag{1.86}$$

Wert der Put-Option gleich Bonitätsprämie

Die Differenz aus ausfallrisikofreiem und ausfallrisikobehaftetem Zerobond entspricht also der Put-Option. Wenn wir uns in Erinnerung rufen, dass diese Differenz gerade durch die Bonitätsprämie beschrieben wird (1.46), so können wir die Bonitätsprämie ermitteln, indem wir die Put-Option bewerten.

Konkretisierung des Unternehmenswertprozesses

Hierzu muss der stochastische Prozess der Unternehmensaktiva konkretisiert werden. Merton unterstellt eine **geometrische Brown'sche Bewegung** für den Wert der Unternehmensaktiva.[32] Mathematisch lässt sich dieser Prozess gemäß folgender Differenzialgleichung beschreiben:

$$dV = \mu\, V\, dt + \sigma\, V\, dW, \tag{1.87}$$

wobei W einen so genannten Wiener-Prozess beschreibt. Der Prozess lässt sich veranschaulichen, indem anstelle infinitesimal kleiner Differenziale endliche Differenzen betrachtet werden:

$$\Delta V \approx \mu\, V\, \Delta t + \sigma\, V\, \epsilon_t \sqrt{\Delta t}. \tag{1.88}$$

[31] Vgl. hierzu den Parallelkurs 42310 „Finanzwirtschaftliche Bewertungstheorie", Kurseinheit 4.

[32] Vgl. hierzu ausführlich den Parallelkurs 42310 „Finanzwirtschaftliche Bewertungstheorie", Kurseinheit 4. Man beachte, dass zur Bewertung von Aktienoptionen häufig eine geometrische Brown'sche Bewegung *für den Aktienkurs* und damit für den Eigenkapitalwert unterstellt wird. Merton hingegen unterstellt eine geometrische Brown'sche Bewegung *für den Unternehmenswert.*

Hierbei bezeichnet ΔV die Veränderung des Unternehmenswertes V in einer kleinen Zeitspanne Δt (zum Beispiel an einem Tag). Die Differenzialgleichung (1.87) bzw. die Differenzengleichung (1.88) besteht aus zwei additiven Komponenten: einer deterministischen Komponente sowie einer stochastischen Komponente. Die deterministische Komponente $\mu V\, dt$ bzw. $\mu V\, \Delta t$ beschreibt einen Wachstumstrend: Im Mittel wächst der Unternehmenswert mit der Wachstumsrate μ. Diesem mittleren Wachstum sind zufällige Schwankungen überlagert, die durch die zweite Komponente beschrieben werden. Die Variable ϵ_t bezeichnet dabei für jedes t zeitlich unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Diese Zufallsvariablen werden durch den Parameter σ, die **Volatilität** des Prozesses, skaliert.

Man kann sich den Prozess also wie folgt vorstellen (siehe auch Abbildung 1.22):

- Zu einem Zeitpunkt t sei der Unternehmenswert V_t gegeben.
- Die Differenzengleichung beschreibt die Veränderung des Unternehmenswertes bis zum nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$: $V_{t+\Delta t} = V_t + \Delta V$.
- Die Veränderung ΔV besteht aus zwei Komponenten:
  - einem relativen Wachstum um $\mu\, V_t\, \Delta t$. Das Wachstum ist relativ zum aktuellen Unternehmenswert V_t; die Wachstumsrate kann daher als prozentuale Steigerung aufgefasst werden. Ferner ist das Wachstum proportional zur Länge des Zeitraums Δt.
  - einer zufälligen Veränderung um $\sigma\, V_t\, \epsilon_t \sqrt{\Delta t}$. Die Stärke der zufälligen Veränderung hängt ab von der Volatilität σ, mit der die standardnormalverteilte Zufallsvariable ϵ_t (die in jedem Zeitschritt unabhängig ist) skaliert wird. Auch die zufällige Veränderung wird relativ zum Unternehmenswert V_t modelliert. In Bezug auf die Länge des Zeitschritts wird hier die Wurzel gezogen, so dass die Standardabweichung der Veränderung in einem Zeitschritt gleich $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ist. Damit ist die Modellierung unabhängig von der Länge des Zeitschritts konsistent.[33]

[33] Für die doppelte Länge $2\,\Delta t$ ergibt sich beispielsweise eine Standardabweichung von $\sigma\sqrt{2\,\Delta t}$. Dasselbe erhält man aus der Summe zweier unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit Standardabweichung $\sigma\sqrt{\Delta t}$, da sich deren Varianzen addieren, die Standardabweichung somit $\sqrt{2\sigma^2\,\Delta t} = \sigma\sqrt{2\,\Delta t}$ beträgt.

Abbildung 1.22. *Beispiel einer geometrischen Brown'schen Bewegung.*

Bewertung der Put-Option nach Black/Scholes/Merton

Wird des Weiteren ein vollkommener Markt unterstellt,[34] so gilt für den Wert des Puts und damit die Bonitätsprämie BP die Black/Scholes-Formel:[35]

$$BP = NW\, e^{-rT} N(-d_2) - V\, N(-d_1) \tag{1.89}$$

mit

$$d_1 = \frac{\log(V/NW) + (r + \sigma^2/2)\, T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{1.90}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \tag{1.91}$$

wobei r den risikofreien *kontinuierlichen* Zinssatz und $N(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. V ist der Unternehmenswert im Bewertungszeitpunkt.

Der Unternehmenswert betrage $V = 10$ Mio. Euro, dessen Volatilität $\sigma = 15\,\%$. Das Unternehmen habe einen Zerobond mit einer Laufzeit von $T = 2$ Jahren und einem Nominalwert von $NW = 8$ Mio. Euro ausstehen. Der risikofreie kontinuierliche Zinssatz betrage $r = 3\,\%$.

[34] Die Vollkommenheit des Marktes bezieht sich dabei insbesondere auch auf die *Handelbarkeit der Unternehmensaktiva* als Underlying der Option. Dieser Umstand wird in der Modellkritik noch zu würdigen sein.

[35] Vgl. hierzu ausführlich den Parallelkurs 42310 „Finanzwirtschaftliche Bewertungstheorie", Kurseinheit 4.

Daraus ergibt sich (mit Hilfe einer Normalverteilungstabelle – siehe den Anhang zu Kurseinheit 2)

$$d_1 = \frac{\log(10/8) + (0{,}03 + 0{,}15^2/2) \cdot 2}{0{,}15 \cdot \sqrt{2}} = 1{,}4408,$$

$$d_2 = 1{,}4408 - 0{,}15 \cdot \sqrt{2} = 1{,}2287,$$

$$\begin{aligned} BP &= 8 \cdot e^{-0{,}03 \cdot 2} \cdot N(-1{,}2287) - 10 \cdot N(-1{,}4408) \\ &= 7{,}534 \cdot 0{,}1096 - 10 \cdot 0{,}0748 \\ &= 0{,}0777. \end{aligned}$$

Die Bonitätsprämie liegt demnach bei 0,078 Mio. Euro. Während der risikofreie Zerobond den Wert

$$ZB = 8 \cdot e^{-0{,}03 \cdot 2} = 7{,}534$$

aufweist, ist der Wert des risikobehafteten Zerobonds ZB^* – und damit der Wert des Fremdkapitals – um den Wert der Bonitätsprämie geringer:

$$FK = ZB^* = 7{,}534 - 0{,}077 = 7{,}457.$$

Der Wert des Eigenkapitals EK entspricht nach unseren Überlegungen dem Wert eines Calls:[a]

$$\begin{aligned} EK &= V\,N(d_1) - NW\,e^{-rT} N(d_2) \\ &= 10 \cdot N(1{,}4408) - 8 \cdot e^{-0{,}03 \cdot 2} \cdot N(1{,}2287) \\ &= 10 \cdot 0{,}9252 - 7{,}534 \cdot 0{,}8904 \\ &= 2{,}543. \end{aligned}$$

Alternativ erhalten wir den Wert aus der Put-Call-Parität (1.84):

$$\begin{aligned} EK &= V - ZB + \text{Put} \\ &= 10 - 8 \cdot e^{-0{,}03 \cdot 2} + 0{,}078 \\ &= 2{,}543. \end{aligned}$$

Auch ohne direkten Rückgriff auf die Put-Call-Parität muss die Summe aus Eigenkapitalwert und Fremdkapitalwert dem Gesamtunternehmenswert entsprechen. Somit können wir als dritte und einfachste Möglichkeit den Eigenkapitalwert wie folgt berechnen:

$$EK = V - FK = 10 - 7{,}457 = 2{,}543.$$

[a] Zur Bewertungsformel für Call-Optionen siehe den Parallelkurs 42310 „Finanzwirtschaftliche Bewertungstheorie", Kurseinheit 4.

Berechnung des Credit Spread

In Kenntnis der absoluten Bonitätsprämie lässt sich auch die renditebezogene Bonitätsprämie, also der Credit Spread $s = r_{BP}$, berechnen. In Konsistenz mit dem Merton-Modell verwenden wir weiterhin die kontinuierliche Zinsrechnung. Der Credit Spread ist definiert als Nominalrendite – vom Wert des Zerobonds ZB^* zur nominalen Rückzahlung NW – abzüglich risikofreiem Zinssatz:

$$NW = ZB^* \, e^{(r+s)T}. \tag{1.92}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & e^{(r+s)T} = \frac{NW}{ZB^*} \\ \Longrightarrow \quad & (r+s)T = \log\left(\frac{NW}{ZB^*}\right) \\ \Longrightarrow \quad & s = \frac{1}{T}\log\left(\frac{NW}{ZB^*}\right) - r. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Im Beispiel erhalten wir

$$s = \frac{1}{2}\log\left(\frac{8}{7{,}457}\right) - 3\,\% = 0{,}49\,\%.$$

Die kontinuierliche Nominalrendite des Zerobonds (und damit der nominale Fremdkapitalzinssatz) beträgt

$$r + s = 3{,}49\,\%,$$

wie wir wie folgt überprüfen:

$$7{,}457 \cdot e^{0{,}0349 \cdot 2} = 8.$$