

AUFGABEN

Klausur: Modul 31801
Problemlösen in graphischen Strukturen

Termin: 21.09.2018

Prüfer: Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

Aufgabe 1

Erreichbare Punktzahl: 18

Gegeben sei der in Abbildung 1 gegebene Digraph $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ mit $V = \{1, 2, \dots, 8\}$ und $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{16}\}$.

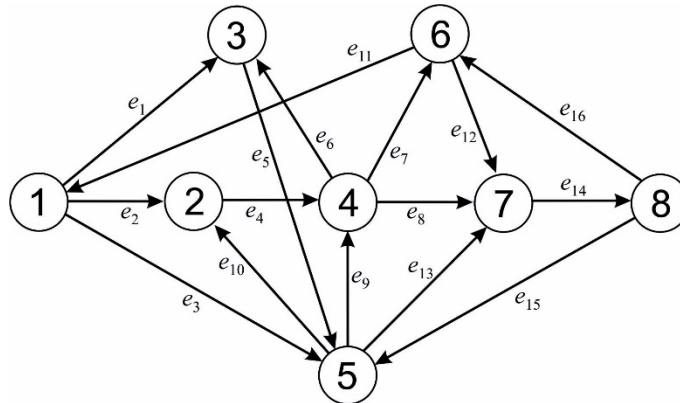


Abbildung 1: Digraph $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ zu Aufgabe 1

- Ist \vec{G} stark zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Ist \vec{G} bipartit? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Notieren Sie für alle Knoten in \vec{G} eine Rundreise auf Basis der Definitionen des Moduls 31801.
- Notieren Sie auf Basis der Definitionen des Moduls 31801 für \vec{G} eine vollständige Tour, die keine Rundreise ist.
- Notieren Sie auf Basis des Moduls 31801 für \vec{G} eine offene Pfeilfolge von Knoten **1** zu Knoten **8**, die kein Weg ist.
- Notieren Sie auf Basis des Moduls 31801 für \vec{G} von Knoten **1** zu Knoten **8** einen Weg.
- Notieren Sie für alle Knoten **1**, ..., **8** von \vec{G} die positiven und die negativen Grade (δ^+ und δ^-).

Problembeschreibung für die Aufgaben 2 und 3

Eine Variante des Kürzeste-Wege-Problems (SPP) ist das sogenannte Kürzeste-Wege-Tour-Problem (englisch: Shortest Path Tour Problem, SPTP). Wie im SPP wird in einem SPTP ein kürzester Weg von einem Startknoten s zu einem Zielknoten t gesucht. Die Besonderheit hierbei ist allerdings, dass eine Folge von Knotenmengen gegeben ist und mindestens ein Knoten je definierter Menge zu besuchen ist. Dabei ist die vorgegebene Reihenfolge der Mengen einzuhalten.

Praktisches Anwendungsgebiet des SPTP ist beispielsweise im Bereich der Kommissionierung zu sehen, wenn bei chaotischer Lagerung gleiche Artikel in mehreren Fächern abgelegt sind. Alle Lagerplätze eines Artikels werden zu einer Menge zusammengefasst. Aufgrund des Gewichts der einzelnen Artikel ergibt sich eine feste Kommissionierreihenfolge.

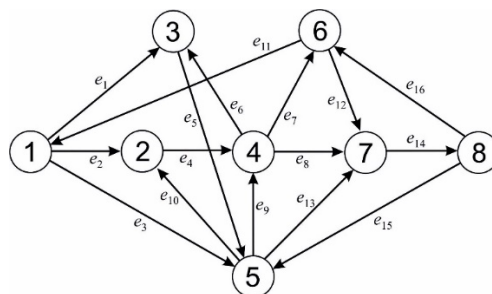


Abbildung 2: Digraph $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ aus Aufgabe 1

Im Digraph \vec{G} aus Abbildung 2 entsprechen die Knoten $1, \dots, 8$ verschiedenen Lagerplätzen, denen die Artikel A, B, C wie folgt zugeordnet sind:

- Startknoten s : $M_1 = \{s = 1\}$,
- Artikel A : $M_2 = \{2, 3\}$,
- Artikel B : $M_3 = \{6, 8\}$,
- Artikel C : $M_4 = \{t = 5\}$.

Knoten 5 ist gleichzeitig Zielknoten t . Die Knoten 4 und 7 sind Wegeknoten, die nur bei Bedarf während der Kommissionierung durchfahren werden können.

In der Entfernungsmatrix D sind die Längen der Verbindungen e_1, e_2, \dots, e_{16} abzulesen.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 0 & \infty & 2 & 5 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & \infty & 6 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 5 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Erreichbare Punktzahl: 25

Betrachtet wird das in der Aufgabenbeschreibung auf Seite 2 vorgestellte Kürzeste-Wege-Tour-Problem mit Anwendung in der Kommissionierung.

- a) Zur allgemeinen Vorbereitung der für den Kommissionierprozess erforderlichen Wegeoptimierung müssen die Entfernungen von jedem Knoten i zu jedem anderen Knoten j ermittelt werden. Führen Sie dazu drei Schritte des Trippel-Algorithmus durch. Notieren Sie zur Entfernungsmatrix D die Wegematrix Q und schreiben Sie für drei weitere Schritte ebenfalls die Matrizen D und Q fort. Nutzen Sie das im Lösungsteil vorgegebene Schema, füllen Sie die Matrizen vollständig aus, „ ∞ “ muss nicht eingetragen werden. Die Matrizen $Q^{(1)}$ bis $Q^{(4)}$ sind also vollständig auszufüllen.
- b) Nach Beendigung des Algorithmus sind die in Tabelle 1 notierten Matrizen $D^{(9)}$ und $Q^{(9)}$ bestimmt, aus denen kürzeste Wege unmittelbar abgelesen werden können. Beantworten Sie folgende Fragen:
 Wie lang ist der kürzeste Weg von Knoten 1 zum Knoten 8?
 Wo ist diese Information genau abzulesen?
 Über welche Knoten verläuft der kürzeste Weg von Knoten 1 zum Knoten 8?
 Mit welchen Elementen der Matrix $Q^{(9)}$ wird dieser Weg konstruiert?
 Beschreiben Sie die Vorgehensweise!

Tabelle 1: Ergebnismatrizen des Tripelalgorithmus in Aufgabe 2

$$D^{(9)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 9 \\ 11 & 0 & 5 & 2 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 14 & 5 & 0 & 5 & 4 & 7 & 9 & 12 \\ 9 & 8 & 3 & 0 & 7 & 2 & 4 & 7 \\ 10 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 10 & 9 & 8 & 0 & 2 & 5 \\ 15 & 8 & 11 & 8 & 7 & 8 & 0 & 3 \\ 12 & 5 & 8 & 5 & 4 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad Q^{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 5 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 5 & 1 & 6 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 8 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

- c) Wird die Kommissionierung so vorgegeben, dass die Artikel A, B, C genau in dieser Reihenfolge einzusammeln sind, muss jeweils mindestens eine Position aus den Mengen M_1, M_2, M_3, M_4 angefahren werden. Mit dem Verbindungsgraph in Abbildung 3 sind alle möglichen Wege für diese Kommissionierreihenfolge erfasst. Notieren Sie zu allen Pfeilen im Lösungsteil die zugehörigen kürzesten Weglängen zwischen den Lagerplätzen.

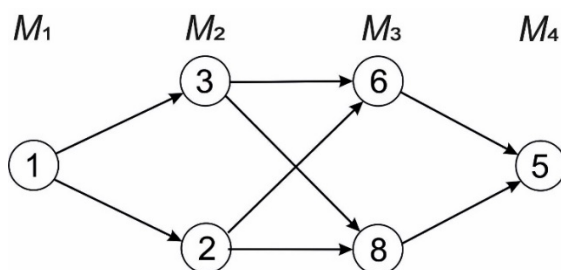


Abbildung 3: Verbindungsgraph zu Aufgabe 2

Aufgabe 3	Erreichbare Punktzahl: 25
------------------	----------------------------------

Betrachtet wird das in der Aufgabenbeschreibung auf Seite 2 vorgestellte Kürzeste-Wege-Tour-Problem mit Anwendung in der Kommissionierung.

In Aufgabe 2b wurden die kürzesten Wege zwischen allen Knoten angegeben, deren Längen in der Matrix $D^{(9)}$ direkt ablesbar sind. Sie ist in Tabelle 2 nochmals für Sie notiert. Für die Kommissionierung der Artikel A, B, C in der gegebenen Reihenfolge müssen alle möglichen Lagerplatzkombinationen betrachtet werden, um den Kommissionierweg zu ermitteln (vgl. Abbildung 3 in Aufgabe 2c). Wenn dies für den vorliegenden Fall auch noch mit vertretbarem Aufwand möglich ist, so steigt die Komplexität bei Erhöhung der Zahl der Lagerplätze und der Zahl zu kommissionierender Artikel. In dieser Aufgabe kommt deshalb der A*-Algorithmus zum Einsatz.

Tabelle 2: Entfernungsmatrix zu Aufgabe 3

$$D^{(9)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 9 \\ 11 & 0 & 5 & 2 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 14 & 5 & 0 & 5 & 4 & 7 & 9 & 12 \\ 9 & 8 & 3 & 0 & 7 & 2 & 4 & 7 \\ 10 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 10 & 9 & 8 & 0 & 2 & 5 \\ 15 & 8 & 11 & 8 & 7 & 8 & 0 & 3 \\ 12 & 5 & 8 & 5 & 4 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

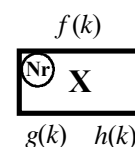
- a) Mit dem A*-Verfahren soll nun auf Basis der bisherigen Überlegungen in dem Verbindungsgraphen von Abbildung 3 der Kommissionierweg bestimmt werden. Folgende Bewertungen sind dabei vorzunehmen:

Die *Zustandskosten* g entsprechen dem bisher bis zum aktuellen Knoten zurückgelegten Weg, der sich als Summe der kürzesten Wege zwischen den Knoten (Lagerplätzen) ergibt; die Einzelstrecken sind $D^{(9)}$ ablesbar.

Die *Schätzfunktion* h bewertet den Restweg der Kommissionierung mit dem kürzesten Weg vom aktuellen Knoten zum Zielknoten $t = 5$, die ebenfalls der Matrix $D^{(9)}$ zu entnehmen ist.

Zeichnen Sie den Suchgraphen S zu der gestellten Aufgabe und expandieren Sie im Algorithmus zu einem ausgewählten Knoten alle Nachfolger. Geben Sie in den Knoten als Nr. an, in welcher Reihenfolge die Knoten für die Expansion ausgewählt werden. Notieren Sie alle Knoten mit vollständigen Angaben; X steht für alle Knoten auf dem bisherigen Weg.

Notieren Sie abschließend den für die Kommissionierung der Artikel A, B, C kürzesten Weg und dessen Länge.



- b) Notieren Sie schrittweise sowohl die Open- als auch die Closed-Liste sowie die Bewertung aller expandierten Knoten bis zur Auswahl des Zielknotens 5.
- c) Terminiert der A*-Algorithmus in der beschriebenen Form stets mit der optimalen Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4	Erreichbare Punktzahl: 22
------------------	----------------------------------

In vier Verteilzentren V_1, V_2, V_3, V_4 wird ein homogenes Gut gelagert, welches in vorgegebenen Mengen zu fünf Empfangsorten transportiert werden soll. Die Lagermengen in den Zentren betragen:

$$V_1 = 180, V_2 = 90, V_3 = 60, V_4 = 150.$$

Die Empfangsorte E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 haben die folgenden Bedarfe:

$$E_1 = 156, E_2 = 66, E_3 = 96, E_4 = 126, E_5 = 36.$$

Jeder Empfangsort kann von jedem Verteilzentrum aus auf der Basis der in Tabelle 3 notierten Transport-Stückkosten beliefert werden.

Tabelle 3: Transport-Stückkosten für die Belieferung

c_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	a_i
V_1	8	10	12	16	22	180
V_2	4	14	16	20	12	90
V_3	14	12	20	10	8	60
V_4	2	4	14	8	16	150
b_j	156	66	96	126	36	480

Mittels Eröffnungsverfahren wurde der in Tabelle 4 gegebene Transportplan ermittelt.

Tabelle 4: Ausgangstransportplan für die Belieferung

x_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	a_i
V_1	66		96	18		180
V_2	90					90
V_3				24	36	60
V_4		66		84		150
b_j	156	66	96	126	36	480

- a) Die ermittelte Lösung in Tabelle 4 ist nicht optimal. Führen Sie zum Nachweis die ersten Schritte des Stepping-Stone-Algorithmus durch und begründen Sie, warum keine Optimalität vorliegt.
- b) Konstruieren Sie eine abgeschlossene Schleife, auf der eine Flussänderung gemäß Stepping-Stone-Algorithmus durchgeführt werden kann. Wie hoch ist die maximale Änderung (in Mengeneinheiten) auf dieser Schleife?

Aufgabe 5	Erreichbare Punktzahl: 10
------------------	----------------------------------

Tourenplanungsprobleme zählen zu den Standardproblemen des Operations Research. Im Gegensatz zum Rundreiseproblem, bei dem alle Orte in einer Tour zu verbinden sind, sollen bei dieser Aufgabe Kunden mit einem Fahrzeug von einem zentralen Depot aus mit Waren beliefert werden. Entscheidend ist dabei, dass die Kapazität des Fahrzeugs beschränkt ist und dieses somit zwischendurch ins Depot zurückkehren muss.

- a) Gegeben seien die 15 Kunden **A** bis **N**, die vom Depot **Z** aus mit Objekten unterschiedlichen Volumens zu beliefern sind. Die Lieferungen für einen Kunden sind nicht teilbar und müssen demnach jeweils vollständig verladen werden. Einziges Ziel ist es, die Anzahl der Fahrten zu minimieren. Geben Sie für einen genetischen Algorithmus (GA) eine geeignete Kodierung an, und beschreiben Sie, wie die eingangs formulierte Restriktion der beschränkten Ladekapazität bei der Optimierung mittels GA berücksichtigt werden kann.
- b) Nennen Sie zwei Crossover-Operatoren, von denen mindestens ein Operator stets zulässige Lösungen erzeugt. Erläutern Sie die Vorgehensweise, und begründen Sie Ihre Antwort.



LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: Modul 31801
Problemlösen in graphischen Strukturen

Termin: 21.09.2018

Prüfer: Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5				Summe
maximale Punktzahl	18	25	25	22	10				100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften
der Prüfer:

Hinweise für die Bearbeitung

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt und den Kopf der Lösungsbögen aus.
 - Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden.
 - Die Lösungen müssen in den vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseite, und geben Sie einen deutlichen Hinweis hierauf.
 - Bedenken Sie, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird.
 - Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
 - Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden.
 - Als Hilfsmittel für diese Klausur sind zugelassen:
Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:
 - Casio fx86 oder Casio fx87,
 - Texas Instruments TI 30 X II,
 - Sharp EL 531.Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Sie selbst überprüfen, indem Sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt.
In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.**
- Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.
- Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg !



Lösung zu Aufgabe 1

Schema für Teilaufgabe g) auf der nächsten Seite!

**Lösung zu Aufgabe 1 (Fortsetzung)**

g)

Knoten	δ^+	δ^-
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

**Lösung zu Aufgabe 2 (Fortsetzung)**

b)

c)

Verbindung	Länge
<1, 2>	
<1, 3>	
<2, 6>	
<2, 8>	
<3, 6>	
<3, 8>	
<6, 5>	
<6, 8>	

**Lösung zu Aufgabe 3**

a)

$$\begin{array}{c} f(k) \\ \boxed{\text{Nr } X} \\ g(k) \quad h(k) \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 3 (Fortsetzung)

b)

Auswahl	OPEN	f	CLOSED
	1		

Hinweis: Notieren Sie schrittweise sowohl die Open- als auch die Closed-Liste sowie die Bewertung aller expandierten Knoten bis zur Auswahl des Zielknotens 5.

c)

Lösung zu Aufgabe 4

a)

\bar{c}_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	u_i
V_1						
V_2						
V_3						
V_4						
u_j						

b)

x_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	a_i
V_1	66		96	18		180
V_2	90					90
V_3				24	36	60
V_4		66		84		150
b_j	156	66	96	126	36	480



Lösung zu Aufgabe 5



Zusätzliche Seite 1; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.



Zusätzliche Seite 2; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.