

Aufgabenteil

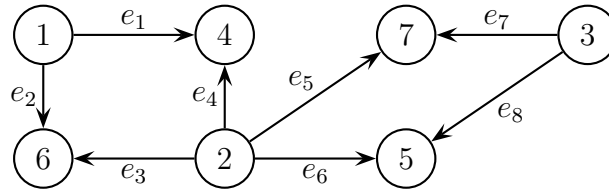
**Klausur: Modul 31801
Problemlösen in graphischen Strukturen**

Termin: 20. September 2019

Prüfer: Univ.-Prof. Andreas Kleine

Aufgabe 1**19 Punkte**

Gegeben sei der in Abbildung 1.1 gegebene Digraph $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ mit $V = \{1, 2, \dots, 7\}$ und $E = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$.

Abbildung 1.1: Digraph \vec{G}

- Ist \vec{G} zyklenfrei? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Ist \vec{G} stark zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Ist \vec{G} bipartit? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Sind die Knoten in \vec{G} topologisch sortiert? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Sind die Knoten 1 und 3 in \vec{G} durch eine Semipfeilfolge verbunden? Falls »ja«, geben Sie eine solche Folge an, falls »nein« begründen Sie Ihre Antwort!
- Stellen Sie die Erreichbarkeitsmatrix von \vec{G} auf!
- Notieren Sie für alle Knoten $1, \dots, 7$ von \vec{G} die positiven und die negativen Grade (δ^+ und δ^-)! Tragen Sie die Werte in Tabelle 1.A im Lösungsteil ein.

Aufgabe 2**20 Punkte**

Gegeben sei ein gerichteter Graph $\vec{G} = \langle V, E \rangle$ mit der Knotenmenge $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$; darüber hinaus liegen zur Beziehungsstruktur des Graphen die in Tabelle 2.1 zusammengestellten Informationen vor.

Tabelle 2.1: Detailangaben zum Graph \vec{G}

Pfeil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Anfangsknoten	A	F	B	A	C	C	F	G	A	F	E	E
Endknoten	B	A	D	C	B	D	C	D	G	E	B	G
Pfeilbewertung	7	3	4	3	1	3	2	2	5	4	1	2

- Zeichnen Sie den Graphen \vec{G} , der **alle** obigen Angaben enthält.
- Geben Sie eine topologische Sortierung zu den Knoten des Graphen \vec{G} an, und tragen Sie diese in Tabelle 2.A ein.
- Bestimmen Sie den kürzesten Weg (die kürzesten Wege) von der Quelle zu allen übrigen Knoten unter Ausnutzung der topologischen Sortierung. Welches der im Kurs 00852 vorgestellten Verfahren bietet sich an? Notieren Sie unter Angabe der ermittelten Knotennummer und dem jeweiligen Knotenbezeichner in Tabelle 2.B im Lösungsteil den unmittelbaren Vorgänger auf dem kürzesten Weg sowie die zugehörigen Entfernungen.

Aufgabe 3

25 Punkte

Mit der Einrichtung eines Bürokomplexes sollen für die bestehenden sieben Abteilungen unter Berücksichtigung des jeweiligen Bedarfs leistungsfähige Kopierer aufgestellt werden. Da die Anzahl der kopierten Seiten abteilungsabhängig sehr unterschiedlich ist, kommt dem Standort eine nicht unerhebliche Bedeutung zu. Zur Vereinfachung geht man davon aus, dass der Standort eines Kopierers sich in einer Abteilung befindet und als Entfernung jeweils die mittleren Weglängen zwischen den Büros der Abteilungen (in [m]) herangezogen werden. In der Tabelle 3.1 sind die zugehörigen Entfernungsdaten zusammengestellt; Tabelle 3.2 enthält die Anzahl erwarteter Kopieraufträge pro Tag.

Tabelle 3.1: Mittlere Weglängen zwischen den Büros der Abteilungen (in [m])

[m]	A	B	C	D	E	F
A	0	40	70	110	150	210
B	40	0	50	90	110	170
C	70	50	0	40	100	160
D	110	90	40	0	80	140
E	150	110	100	80	0	60
F	210	170	160	140	60	0

Tabelle 3.2: Erwartete Kopieraufträge pro Tag

[Anzahl]	A	B	C	D	E	F
	30	10	20	110	90	40

- a) Gewichten Sie die Entfernungen mit der jeweiligen Zahl der Kopieraufträge, und ermitteln Sie mit dem Add-Algorithmus den optimalen Standort für einen Kopierer. In welcher Abteilung sollte dieser aufgestellt werden? Notieren Sie die durchgeführten Berechnungen in der vorbereiteten Tabelle 3.A im Lösungsteil und begründen Sie kurz Ihre Antwort.
- b) Ermitteln Sie nun mit Hilfe des Add-Algorithmus den Standort für einen zweiten Kopierer. Tragen Sie alle Ergebnisse in die Tabelle 3.A im Lösungsteil ein. Welche Wege müssen pro Tag erwartungsgemäß insgesamt zurückgelegt werden?

Aufgabe 4**16 Punkte**

Ein Produzent hat Betriebsstätten in Augsburg (A), Bonn (B) und Celle (C). In allen Betriebsstätten wird das gleiche Produkt (ein homogenes Gut) in den Mengen 65, 77 und 58 Tonnen pro Periode hergestellt. Zu beliefern sind vier Großhändler in Köln (K), Lübeck (L), Mannheim (M) und Nürnberg (N); sie benötigen pro Periode 38, 61, 47 und 54 Tonnen dieser Ware. Die Transportkosten in EURO je beförderter Tonne sind Tabelle 4.1 zu entnehmen. Ziel ist es, einen kostenminimalen Transportplan zu ermitteln.

Tabelle 4.1: Transportkosten in EURO je beförderter Tonne

[€/t]	nach	K	L	M	N
von					
A		50	85	30	15
B		5	50	25	40
C		35	20	45	50

- a) Bestimmen Sie mit der Zeilen-Spalten-Minimum-Methode einen zulässigen Transportplan. Starten Sie auf dem Feld mit dem absolut kleinsten Kostenwert. Kennzeichnen Sie die Reihenfolge, in der die Transportverbindungen hinzugenommen wurden. Wie hoch sind die Gesamtkosten aller realisierten Transporte? Tragen Sie die Lösung in Tabelle 4.A im Lösungsteil ein.
- b) In der Quant-Abteilung des Unternehmens wurde mit einer anderen Heuristik der Transportplan in Tabelle 4.2 ermittelt, dem Kosten von 3.540 EURO entsprechen. Um zu prüfen, ob weitere Verbesserungen möglich sind, sollen Sie die erste Phase der Stepping Stone Methode (bis zum Schritt 3) durchführen und für alle Felder des Tableaus die reduzierten Kosten \bar{c}_{ij} berechnen. Tragen Sie diese in Tabelle 4.B im Lösungsteil ein. Wie lautet das Ergebnis der Überprüfung; begründen Sie mit kurzen Sätzen Ihre Antwort.

Tabelle 4.2: Transportplan

[t]	nach	K	L	M	N
von					
A				11	54
B		38	3	36	
C			58		

Aufgabe 5

20 Punkte

Sie besitzen ein Transportschiff, mit dem Sie Güter von den Häfen (A oder B) nach (C oder D) transportieren. Grundsätzlich in Frage kommen die in Tabelle 5.1 zusammengestellten (einmaligen) Frachtaufträge. Mit einer Fahrt kann nur ein Auftrag übernommen werden; für den nächsten Auftrag muss das Schiff wieder zu A oder B zurück. Akzeptieren Sie einen Auftrag, so muss

Tabelle 5.1: Potentielle Frachtaufträge

Auftrag	Start	Ziel	Lieferdatum	Gewinn [T€]
1	A	C	4	6
2	A	D	7	10
3	B	C	4	7
4	B	D	9	4

bis einschließlich zum genannten Datum geliefert werden, da ansonsten (hohe) Strafzahlungen fällig werden und kein Gewinn entsteht. In Tabelle 5.2 stehen die Fahrzeiten (in Tagen [d]) der Schiffe von A/B nach C/D inklusive Be- und Entladezeit sowie die Zeiten für die Rückfahrten. Ziel ist es, alle Aufträge anzunehmen, die realisiert werden können und die in der Summe den höchsten Gewinn bringen.

Tabelle 5.2: Auftragsbezogene Frachtzeiten

[d] nach von	C	D
A	3	2
B	2	3

[d] nach von	A	B
C	2	1
D	1	2

Nutzen Sie die Breitensuche zur Betrachtung aller möglichen Alternativen und zeichnen Sie den zugehörigen Suchbaum. Beginnen Sie im Heimathafen H (zum Zeitpunkt 0); die Fahrten zu A und B dauern beide 1 Tag. Notieren Sie an jedem Knoten gemäß Abbildung 5.1 den Tag der Ankunft und am Pfeil die Fahrtzeit. Ein Knoten wird dann nicht weiter betrachtet, wenn die Fahrt dorthin am Tag 10 oder später endet.

Bewerten Sie jedes Blatt des Suchbaums mit dem dort realisierbaren Gewinn. Notieren Sie zum maximalen Gewinn außerdem die demnach zu übernehmenden Frachtaufträge.

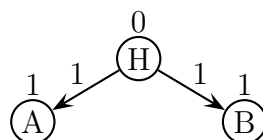


Abbildung 5.1: Suchbaum \vec{S}

Lösungsbögen

**Klausur: Modul 31801
Problemlösen in graphischen Strukturen**

Termin: 20. September 2019

Prüfer: Univ.-Prof. Andreas Kleine

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
maximale Punktzahl	19	20	25	16	20				100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum

Unterschrift
des Prüfers

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 31801

- Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigegeführten Lösungsbogen und tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!
- Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden.
- Die Lösungen müssen in den vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte Leerseiten und geben Sie einen deutlichen Hinweis hierauf.
- Bedenken Sie, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet werden.
- Die Klausur umfasst **5 Aufgaben**, die in **120 Minuten** zu bearbeiten sind.
- Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben.**

- **Hilfsmittel**

Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:

- Casio fx86 oder Casio fx87,
- Texas Instruments TI 30 X II,
- Sharp EL 531.

Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt.

In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

- Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.
- Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

Lösung zu Aufgabe 1

a)

b)

c)

d)

e)

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 1

f)

g)

Tabelle 1.A: Knotengrade zu Abbildung 1.1

Nr.	δ^+	δ^-
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		



Lösung zu Aufgabe 2

a)

b)

Tabelle 2.A: Topologische Sortierung zum Graphen \vec{G}

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Bezeichner							

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 2

c)

Tabelle 2.B: Weglängen von der Quelle F zu den Knoten $V = \{A, B, C, D, E, G\}$

Nr. j	Knoten- bezeichner	direkter Vorgänger auf dem kürzesten Weg zu j	Entfernung von der Quelle zu j
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			



Lösung zu Aufgabe 3

a) und b)

Tabelle 3.A: Lösungsschema

	A	B	C	D	E	F	1: σ_i	2: η_i
A								
B								
C								
D								
E								
F								
1: δ_j								
1: ν_j								
2: δ_j								
2: ν_j								

zu a)

In welchem Büro soll der Kopierer aufgestellt werden?

zu b)

Wo steht der zweite Kopierer?

Welche Wege müssen pro Tag erwartungsgemäß insgesamt zurückgelegt werden?

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 3



Lösung zu Aufgabe 4

a)

Tabelle 4.A: Lösungsschema Zeilen-Spalten-Minimum-Methode

	K	L	M	N	a_i
A	50	85	30	15	
B	5	50	25	40	
C	35	20	45	50	
b_j					

Legende:

c_{ij}
x_{ij}

Kennzeichnen Sie die Reihenfolge, in der die Transportverbindungen zugeordnet wurden.

Wie hoch sind die Gesamtkosten aller realisierten Transporte?

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 4

b)

Tabelle 4.B: Lösungsschema zu Teil b) (Stepping-Stone)

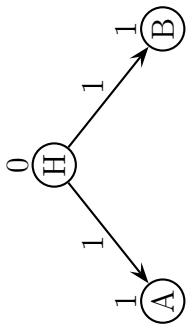
	K	L	M	N	u_i
A	50	85	30	15	
B	5	50	25	40	
C	35	20	45	50	
u_j					

Legende:

c_{ij}
\bar{c}_{ij}

Antwort:

Lösung zu Aufgabe 5

Abbildung 5.A: Suchbaum \vec{S}

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 5

Maximaler Gewinn:

Zugehörige Frachtaufträge:



Zusätzliche Seite 1

Bezug bitte deutlich kennzeichnen!

Zusätzliche Seite 2

Bezug bitte deutlich kennzeichnen!