

Aufgabenteil

**Klausur: Modul 31801
Problemlösen in graphischen Strukturen**

Termin: 20. März 2020

Prüfer: Univ.-Prof. Andreas Kleine

Aufgabe 1

20 Punkte

Gegeben sei der in Abbildung 1.1 gegebene ungerichtete Graph $G = [V, E]$ mit $V = \{A, B, \dots, H\}$ und $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$.

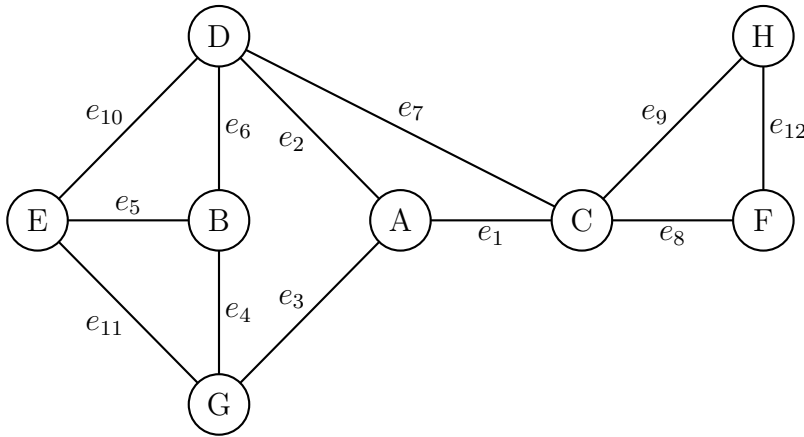


Abbildung 1.1: Graph $G = [V, E]$

- Notieren Sie für den Graphen G eine Kette, die alle Knoten verbindet.
- Wieviele Knoten in G haben einen ungeraden Grad?
- Stellen Sie zum Graphen G die Adjazenzmatrix $A(G)$ und die Inzidenzmatrix $B(G)$ auf.
- Verbinden Sie in Abbildung 1.A im Lösungsteil die Knoten der Knotenmenge V so, dass ein Minimalgerüst entsteht. Gehen Sie gemäß Algorithmus von Kruskal vor, und interpretieren Sie die Nummerierung der Kanten als Kantengewichte (Kante e_k besitzt das Gewicht k).
Notieren Sie im Lösungsteil zusätzlich die **Reihenfolge**, in der die Kanten ausgewählt wurden.
- Zeichnen Sie zu der Teilmenge $V' = \{A, B, C, E, F, H\}$ des Graphen G den Untergraphen G' . Ist G' zusammenhängend?

Aufgabe 2

30 Punkte

Im Sinne des Teambuildings lädt das Management des europaweit tätigen Beratungsunternehmens EUROR die Projektleiterinnen und Projektleiter einmal pro Monat in die Zentrale, um in einer Teamsitzung alle über den Stand der aktuellen Projekte zu informieren und anschließend bei einer After-Work-Party die interdisziplinäre Kommunikation zu fördern.

Im vorliegenden Beispiel gibt es acht Bezirksvertretungen, in denen jeweils ein Projekt betreut wird. In dem bewerteten Graphen in Abbildung 2.1 repräsentiert die Knotenmenge $V = \{A, B, \dots, H\}$ die Bezirke, und an den Kanten ist die Entfernung der zueinander inzidenten Knoten (in 100 km) angegeben. Damit ist ein reduziertes Wegenetz definiert, in dem nicht (zwingend) die Dreiecksungleichung gilt, das aber in diesem Fall für eine Verbindungssuche hinreichend sei. In Knoten H befindet sich gleichzeitig die Zentrale des Beratungsunternehmens.

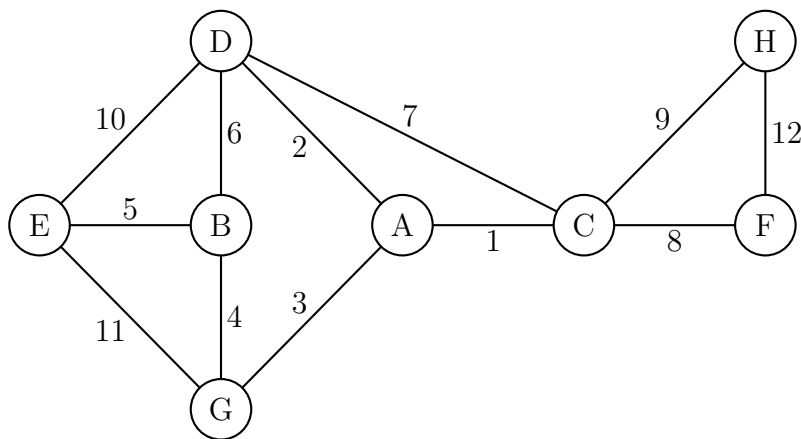


Abbildung 2.1: Graph $G = [V, E; c]$

- a) Sie wissen, dass der Dijkstra-Algorithmus sich unter den gegebenen Voraussetzungen als Verfahren zur Berechnung kürzester Wege eignet. Bestimmen Sie mittels Dijkstra die kürzesten Wege der Knoten A, B, ..., G zum Knoten H und ihre Längen.

Nutzen Sie für die einzelnen Iterationen im Lösungsteil das Schema in Tabelle 2.A.

Notieren Sie zusätzlich alle Wege und die zugehörigen Weglängen; **verwenden Sie dazu das Schema in Tabelle 2.B.**

- b) Welche Entfernung muss in der Summe zurückgelegt werden, wenn alle Projektleiter/innen aus den Bezirksvertretungen zum Treffen in die Zentrale fahren? (Betrachten Sie nur die einfache Fahrt, also nicht Hin- und Rückfahrt!)
- c) Zeichnen Sie zu der in Teilaufgabe a) ermittelten Lösung den Wegebaum. **Nutzen Sie im Lösungsteil Abbildung 2.A.**

Aufgabe 3**25 Punkte**

Das Beratungsunternehmen EUROR hat fünf Praktikumsstellen ausgeschrieben und geeignete Personen aus der großen Zahl der Bewerberinnen und Bewerber ausgewählt. Die Praktikantinnen und Praktikanten sollen den fünf Bezirken A, B, C, D und E zugeordnet werden und die dort aktuellen Projekte kennenlernen. Die im Vorfeld durchgeführten Assessments ergaben eine Reihung hinsichtlich der Eignung und Interessen für die Projekte. Die Rangreihenfolge der Praktikant/inn/en P_i hinsichtlich der Projekte in den Bezirken A, B, C, D, E entnehmen Sie bitte Tabelle 3.1. (1 entspricht der höchsten und 5 der niedrigsten Eignung.)

Tabelle 3.1: Eignung der Praktikant/inn/en P_i für die Projekte

	A	B	C	D	E
P_1	4	1	1	3	5
P_2	2	3	3	1	2
P_3	3	2	2	2	1
P_4	1	4	5	5	4
P_5	5	5	4	4	3

Ziel ist es, mit Hilfe der Ungarischen Methode eine optimale Zuordnung von Praktikantinnen und Praktikanten zu den Bezirken zu bestimmen. Bearbeiten Sie dazu die nachfolgenden Teilaufgaben.

a) Bestimmen Sie gemäß Schritt 1 Algorithmus 9.2 (KE2) die reduzierte Matrix. Ermitteln Sie nacheinander erst u_i und dann u_j . Markieren Sie in der reduzierten Matrix eine Menge UN von unabhängigen Nullen.

b) **Übertragen Sie das Ergebnis mit allen Werten und der Markierung in die Tabelle 3.A im Lösungsteil.**

Setzen Sie den Algorithmus fort, und bestimmen Sie mit Ausführung der erforderlichen Schritte 3 bis 5 (Markierung und Korrektur) eine optimale Zuordnung.

Verwenden Sie für jede mit Schritt 3 (Markierung) beginnenden Iteration ein eigenes, in Tabelle 3.B im Lösungsteil vorgegebenes Schema, in das jeweils für Schritt 3 auch die Marken einzutragen sind.

c) Notieren Sie die von Ihnen ermittelte (evtl. auch unvollständige) Zuordnung von Praktikantinnen bzw. Praktikanten zu Bezirken unter Nennung der jeweiligen Eignung.

Mit welcher durchschnittlichen Eignung wurden die Praktikumsplätze vergeben?

Aufgabe 4

25 Punkte

Beim Beratungsunternehmen EUROR sind derzeit acht Projekte in der Bearbeitung; Projekt **a** im Bezirk A, ..., Projekt **h** im Bezirk H. EUROR beschäftigt sechs IT-Spezialistinnen und Spezialisten mit unterschiedlichen Kompetenzen, die in den Projekten zum Einsatz kommen sollen.

Die nachfolgende Matrix U gibt an, welche Spezialistin bzw. welcher Spezialist auf jeden Fall Aufgaben im jeweiligen Projekt zu erfüllen hat. ($u_{ij} = 1$ bedeutet, Spezialist/in S_i muss auf jeden Fall im Projekt j arbeiten. Die Nummerierung j der Projekte entspricht der alphabetischen Reihenfolge, also Projekt **a** ist Nr. 1 usw.)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jedes Projekt dauert genau eine Woche; die Gesamtzeit zur Durchführung aller Projekte soll minimiert werden. **Ein/e Spezialist/in kann in einer Woche immer nur in einem Projekt mitarbeiten.** Bezogen auf die obige Matrix U bedeutet das, die in einer Zeile einem Spezialisten zugeordneten Projekte stellen eine Konfliktmenge dar, da diese nicht gleichzeitig ausgeführt werden können.

Lösen Sie dieses Problem, indem Sie alle nachfolgenden Teilaufgaben vollständig bearbeiten.

- Das Problem soll als Färbungsproblem modelliert werden. Erläutern Sie zu obiger Problembeschreibung die vorzunehmende Abstraktion, indem Sie die **Bedeutung der Knoten** und der zu zeichnenden **Kanten** angeben.
- Welche Bedeutung hat für eine zulässige Einfärbung die Menge der mit einer Farbe gefärbten Knoten?
- Interpretieren Sie das Ziel, alle Projekte zusammengenommen in einem möglichst kurzen Zeitraum durchzuführen, im Sinne des Färbungsproblems. Wie lautet dann konkret die Zielsetzung des Färbungsproblems?
- Bei Verwendung der vier Farben I, II, III und IV bezeichne K_i ($i = \text{I, II, III, IV}$) jeweils eine Farbenklasse, d.h. die Menge der mit dieser Farbe eingefärbten Knoten. Eine nicht (notwendigerweise zulässige) Einfärbung sei wie folgt gegeben:
 $K_{\text{I}} = \{\mathbf{a}, \mathbf{e}\}$, $K_{\text{II}} = \{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$, $K_{\text{III}} = \{\mathbf{c}, \mathbf{f}\}$, $K_{\text{IV}} = \{\mathbf{g}, \mathbf{h}\}$

Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen des Färbungsproblems durch Ergänzung der Abbildung 4.A im Lösungsbogen und notieren Sie an den Knoten die jeweiligen Farben.

- e) Führen Sie drei Iterationen des Verfahrens Simulated Annealing unter Anwendung des im Kurs beschriebenen Pseudocodes durch.

Verwenden Sie die in d) gegebene Einfärbung als Startlösung; die erste Nachbarlösung ist vorgegeben.

Erzeugen Sie weitere **Nachbarlösungen** durch beliebiges Umfärben eines solchen Knotens, der durch eine Kante mit einem Knoten gleicher Farbe verbunden ist.

Die Bewertung eines Graphen sei die Anzahl solcher Kanten mit inzidenten Knoten gleicher Färbung.

Führen Sie die Abkühlung gemäß $T_{k+1} = 0,5 \cdot T_k$ durch; die Starttemperatur sei $T_0 = 5$.

Tragen Sie Ihre Ergebnisse im Lösungsbogen in das vorgegebenen Schema in Tabelle 4.A ein. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

Lösungsbögen

**Klausur: Modul 31801
Problemlösen in graphischen Strukturen**

Termin: 20. März 2020

Prüfer: Univ.-Prof. Andreas Kleine

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
maximale Punktzahl	20	30	25	25					100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum

Unterschrift
des Prüfers

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 31801

- Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigegefügtten Lösungsbogen und tragen Sie zunächst auf das Deckblatt der Lösungsbögen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein; auf allen weiteren Bögen ist nur die Matrikelnummer zu notieren.
- Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Den Klausurteil können Sie mitnehmen.
- Die Lösungen müssen in den vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte Leerseiten und geben Sie einen deutlichen Hinweis hierauf.
- Bedenken Sie, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet werden.
- Die Klausur umfasst **4 Aufgaben**, die in **120 Minuten** zu bearbeiten sind.
- Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben.**

- **Hilfsmittel**

Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:

- Casio fx86 oder Casio fx87,
- Texas Instruments TI 30 X II,
- Sharp EL 531.

Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt.

In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

- Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.
- Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

Lösung zu Aufgabe 1

a)

b)

c)

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 1

d)

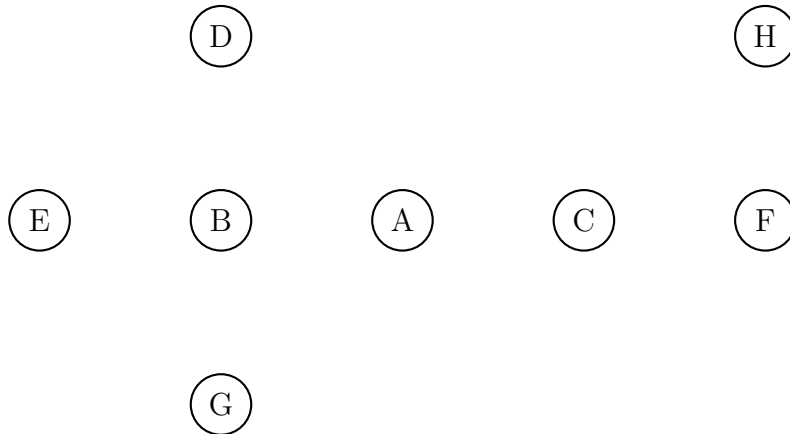


Abbildung 1.A: Knoten des Graphen $G = [V, E]$

Auswahlreihenfolge der Kanten:

e)

Lösung zu Aufgabe 2

a)

Tabelle 2.A: Lösungsschema

Knoten (j)	Iteration							
	1		2		3		4	
	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j
A (1)								
B (2)								
C (3)								
D (4)								
E (5)								
F (6)								
G (7)								
H (8)	0	∅	0	∅	0	∅	0	∅
L								
M								

Knoten (j)	Iteration							
	5		6		7		8	
	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j	d_j	q_j
A (1)								
B (2)								
C (3)								
D (4)								
E (5)								
F (6)								
G (7)								
H (8)	0	∅	0	∅	0	∅	0	∅
L								
M								

Jede Veränderung muss im Lösungsschema erkennbar sein. Zur letzten durchgeführten Iteration j müssen alle Werte d_j und alle q_j eingetragen werden. Die Mengen L und M müssen für alle Iterationen vollständig notiert werden.

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 2

Tabelle 2.B: Kürzeste Wege zum Knoten H im Graphen G von Abbildung 2.1

(j)	Kürzester Weg von j zum Knoten H(8)	Entfernung
A(1)		
B(2)		
C(3)		
D(4)		
E(5)		
F(6)		
G(7)		

b)

c)

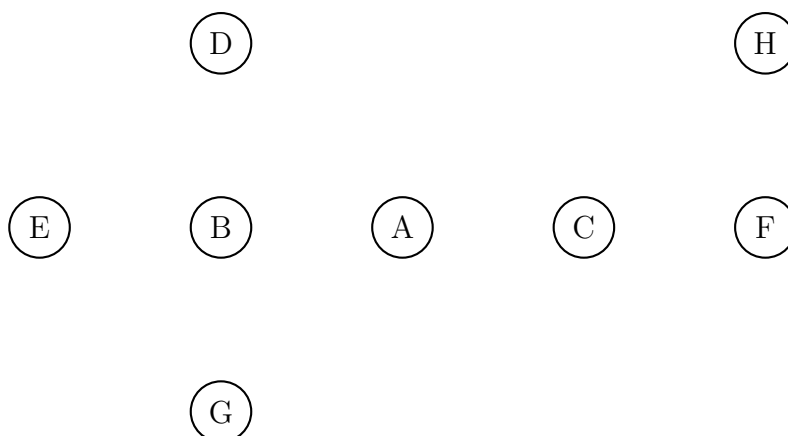


Abbildung 2.A: Wegebaum zum Graphen $G = [V, E; c]$

Lösung zu Aufgabe 3

a)

b)

Tabelle 3.A: Lösungsschema

P_i	Bezirke					u_i	Marken
	A	B	C	D	E		
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
u_j							
Marken							

Tragen Sie alle Werte sowie die möglichen Markierungen in das Lösungsschema ein.

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 3

Tabelle 3.B: Lösungsschema

P_i	Bezirke					u_i	Marken
	A	B	C	D	E		
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
u_j							
Marken							

P_i	Bezirke					u_i	Marken
	A	B	C	D	E		
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
u_j							
Marken							

Tragen Sie alle Werte sowie die möglichen Markierungen in das Lösungsschema ein.



Lösung zu Aufgabe 4

a)

b)

c)

Fortsetzung Lösung zu Aufgabe 4

d)

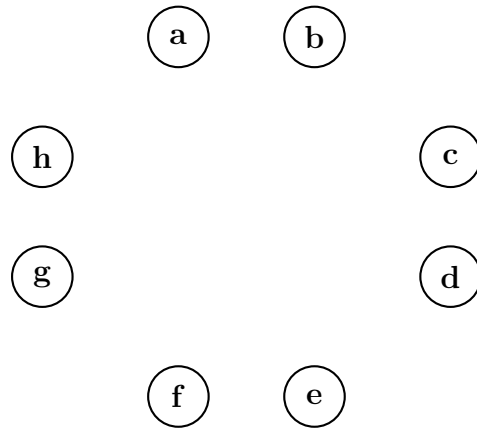


Abbildung 4.A: Konfliktgraph

e)

Tabelle 4.A: Lösungsschema

Aktuelle Lösung	Nachbarlösung	F_{alt}	F_{neu}	Δ	T	$e^{-\frac{\Delta}{T}}$	R	Akzeptanz
$K_I = \{a, e\}$ $K_{II} = \{b, d\}$ $K_{III} = \{c, f\}$ $K_{IV} = \{g, h\}$	$K_I = \{a, d, e\}$ $K_{II} = \{b\}$ $K_{III} = \{c, f\}$ $K_{IV} = \{g, h\}$				5		0,9	
$K_I =$ $K_{II} =$ $K_{III} =$ $K_{IV} =$	$K_I =$ $K_{II} =$ $K_{III} =$ $K_{IV} =$						0,28	
$K_I =$ $K_{II} =$ $K_{III} =$ $K_{IV} =$	$K_I =$ $K_{II} =$ $K_{III} =$ $K_{IV} =$						0,65	

Zusätzliche Seite 1

Bezug bitte deutlich kennzeichnen!

Zusätzliche Seite 2	Bezug bitte deutlich kennzeichnen!
---------------------	------------------------------------