

AUFGABEN

Klausur:	Modul 31811 Planen mit mathematischen Modellen
Termin:	20.09.2017
Prüfer:	Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

Aufgabe 1

25 Punkte

Die international ausgerichtete BLUESCREEN AG plant die Erweiterung ihres Clouddienstes HIMMELBLAU. Um den Kapazitätsbedarf decken zu können, ist der Bau eines neuen Rechenzentrums am Standort Wolkenhausen vorgesehen. Im Gespräch mit dem IT-Guru Bill Works wurde der Projektablauf in 7 Teilschritten wie folgt beschrieben:

- **Bauplanung (BP)**
Das Projekt startet mit der Bauplanung. Dieser Vorgang beansprucht erfahrungsgemäß 8 Wochen. Da die Genehmigung der zuständigen Behörde vielfachen Einflüssen unterliegt, sollen alle nachfolgenden Projektschritte frühestens 4 Wochen nach Abschluss der Bauplanung beginnen.
- **Errichtung Gebäudekomplex (EG)**
Für die Errichtung der geplanten und genehmigten Gebäude sind 20 Wochen vorzusehen.
- **Beschaffung und Lieferung technische Ausstattung (BA)**
Die Beschaffung der technischen Ausstattung erfolgt direkt in Asien. Nach Abstimmung mit dem Lieferanten FuManChu-Computers werden für die Beschaffung und Lieferung 12 Wochen vereinbart. Die Beschaffung kann nach Abschluss der Bauplanung bereits parallel zur Errichtung des Gebäudekomplexes (EG) starten, jedoch frühestens ab der 19. Woche und ohne Verzögerungen im Projektablauf zu verursachen.
- **Installation technische Ausstattung (IA)**
Die Installation der technischen Ausstattung kann unmittelbar beginnen, sobald der Gebäudekomplex errichtet (EG) ist und die technischen Ausstattung beschafft und geliefert (BA) wurde. Bill Works erklärt, dass erfahrungsgemäß von einem Zeitbedarf von 10 Wochen auszugehen ist.
- **Testbetrieb (TB)**
Im Anschluss an die Installation der technischen Ausstattung (IA) soll das neue Rechenzentrum einem Testbetrieb unterzogen werden. Hierzu wird das interne Testteam WETTERFEST der BLUESCREEN AG beauftragt, welches ausschließlich mit langjährigen Mitarbeitern besetzt ist. Der Testbetrieb beansprucht bei erfolgreicher Testdurchführung und kontinuierlicher Kaffeeversorgung des Testteams 8 Wochen. Für etwaige Nacharbeiten sind zusätzliche 4 Wochen zu berücksichtigen.

- **Einstellung und Einarbeitung neuer Mitarbeiter (EM)**
Die Einstellung und Einarbeitung neuer Mitarbeiter erfolgt im Anschluss an die Installation der technischen Ausstattung (IA) und parallel zum Testbetrieb (TB), beansprucht jedoch nur 6 Wochen Zeit. Während der Testphase fallen für die neu einzuarbeitenden Mitarbeiter jedoch keine weiteren Tätigkeiten an.
- **Inbetriebnahme (GO)**
Die Inbetriebnahme findet unmittelbar im Abschluss an den Testbetrieb (TB) sowie die Einarbeitung der neuen Mitarbeiter (EM) statt und beansprucht selbst keinen Zeitaufwand. Das Projekt endet mit der Inbetriebnahme des Rechenzentrums. Die Inbetriebnahme soll frühestmöglich und ohne weitere Verzögerung beginnen.

Ihnen wurde soeben die Projektplanung übertragen. Bearbeiten Sie – situationsbedingt nur mit Stift, Papier und (zulässigem) Taschenrechner ausgerüstet – die folgenden Aufgaben:

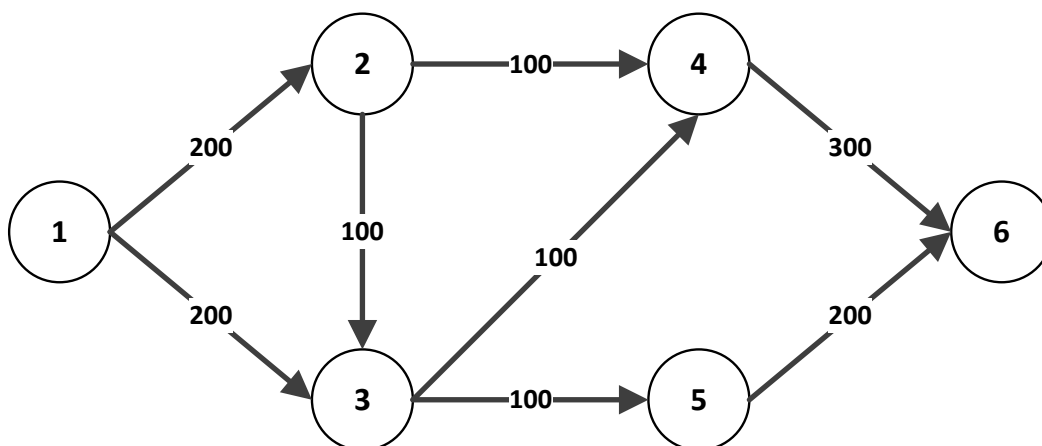
- a) Zeichnen Sie mit der aus dem Kurs bekannte Notation einen Netzplan, welcher die im Gespräch mit Bill Works erfassten Informationen zum Projektablauf berücksichtigt. Führen Sie eine Zeitrechnung einschließlich Vorwärts- und Rückwärtsrechnung durch und bestimmen Sie die Pufferzeiten.
- b) Setzen Sie sich kurz mit folgender Behauptung des Vorstandsassistenten Klaus Blickig auseinander: Das Projekt ist nicht zeitkritisch! Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Erläutern Sie die bei der Erstellung des Netzplanes erhaltene Lösung für die Einarbeitung neuer Mitarbeiter (EM). Angenommen, die neuen Mitarbeiter können zu einem beliebigen Zeitpunkt eingestellt werden: Welchen Vorschlag zum Einstellungstermin würden Sie dem Chefcontroller der BLUESCREEN AG, Quanto Costa, zur Planung vorschlagen? Welche Änderung müssen Sie dazu im Netzplan beim Schritt EM vornehmen?



Aufgabe 2

38 Punkte

Aus Gründen der Verfügbarkeit werden die Daten nicht nur in den Rechenzentren selbst, sondern zugleich an mehreren Standorten der BLUESCREEN AG redundant aufbewahrt. Um den internen Datenaustausch zwischen den Rechenzentren zu ermöglichen, wird auch der neue Standort in Wolkenhausen in das Netz der bereits existierenden Rechenzentren der BLUESCREEN AG eingebunden. Aufgrund der großen Entfernungen zwischen den Rechenzentren erfolgt der Datenfluss über verschiedene Zwischenknoten. Die nachfolgende Abbildung veranschaulicht exemplarisch das Flussnetzwerk zwischen der einzigen Datenquelle am Standort Wolkenhausen (1) und der einzigen Senke in Bitstadt (6) sowie den nicht näher bezeichneten Zwischenknoten 2 bis 5. Die Leitung zwischen jeweils zwei Knoten i ($i = 1, \dots, 5$) und j ($j = 2, \dots, 6$) wird durch eine Kante x_{ij} erfasst. Jede Kante besitzt dabei eine maximale Datenflusskapazität von κ_{ij} in Gigabit/s (GBit/s). Der Pfeil symbolisiert, dass der Datenfluss nur in eine Richtung erfolgen kann.



Um den maximalen Datenfluss x_0 zwischen Wolkenhausen und Bitstadt zu ermitteln wurde vom OR-Experten Max Flow das nachstehende mathematische Optimierungsmodell aufgestellt:

$$\max x_0 = x_{46} + x_{56} \quad (1)$$

u. d. N.

$$x_{23} + x_{24} - x_{12} = 0 \quad (2)$$

$$x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} = 0 \quad (3)$$

$$x_{46} - x_{24} - x_{34} = 0 \quad (4)$$

$$x_{56} - x_{35} = 0 \quad (5)$$

$$x_{12} \leq 200, x_{13} \leq 200, x_{23} \leq 100, x_{24} \leq 100, \\
 x_{34} \leq 100, x_{35} \leq 100, x_{46} \leq 300, x_{56} \leq 200 \quad (6)$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{46}, x_{56} \geq 0 \quad (7)$$

Bearbeiten Sie nun unter Zuhilfenahme der Abbildung sowie dem dazugehörigen mathematischen Modell die nachfolgenden Aufgaben:

- a) Die Vorstandsvorsitzende der BLUESCREEN AG, Dr. Magna Sway, bittet Sie, ihr das Modell näher zu erläutern. Erklären Sie kurz Inhalt, Sinn und Zweck der im mathematischen Modell enthaltenen
 - i. Zielfunktion (1),
 - ii. Nebenbedingung (2) bis (5),
 - iii. Nebenbedingungen (6) sowie
 - iv. Nebenbedingungen (7).
- b) Der OR-Experte Max Flow hatte bereits begonnen, die Aufgabe mittels Simplex-Algorithmus zu lösen, jedoch spät am Abend das Auffinden seiner Kollegen im Biergarten dem Auffinden der optimalen Lösung vorgezogen. Ermitteln Sie daher mit Hilfe der auf dem Lösungsbogen auf Seite 4 angegebenen Tableaus den maximalen Fluss zwischen Wolkenhausen (1) und Bitstadt (6), indem Sie den Simplex-Algorithmus weiter anwenden!
- c) Interpretieren Sie die unter b) ermittelte Lösung, indem Sie diese aus dem optimalen Simplex-Tableau ablesen und in die freien Felder in der Grafik auf dem Lösungsbogen auf Seite 5 eintragen! (*Anm.: Sollte es Ihnen nicht gelingen, eine optimale Lösung zu ermitteln, entnehmen Sie bitte eine Lösung und benennen Sie das herangezogene Tableau!*)
- d) Der OR-Experte Max Flow hatte es einfach: In der Ausgangssituation war ein Datenfluss von 0 GBit/s eine zulässige Startlösung. Angenommen, es wird ein Datenfluss von mindestens 100 GBit/s verlangt:
 - i. Formulieren Sie die Vorgabe als eine weitere Nebenbedingung zum gegebenen mathematischen Modell!
 - ii. Erläutern Sie kurz, welchen Einfluss diese Bedingung auf das Vorgehen zur Ermittlung der Lösung mit dem Simplex-Algorithmus hat!



Aufgabe 3

12 Punkte

Für das neue Rechenzentrum der BLUESCREEN AG wird Technik benötigt. Hierzu hat der Controller Quanto Costa ein Budget B vorgesehen. Zusätzlich besteht eine Platzbeschränkung von K Einbauplätzen. In einer Analyse des IT-Gurus Bill Works konnte für jeden Ausstattungsgegenstand i ein Nutzenwert u_i für den Clouddienst „HIMMELBLAU“ ermittelt werden. Die nachfolgende Tabelle enthält die Liste der technischen Ausstattungsgegenstände, welche jeweils mehrfach angeschafft werden können:

i	Ausstattungsgegenstand
1	Server „Bud“
2	Server „Joe“
3	Speichersystem „Lilly“
4	Datensicherung „Tape“
5	Datensicherung „Hard“
6	Zusätzlicher Prozessor „Power“
7	Stromversorgungseinheit „Ustro“

Bearbeiten Sie zur Optimierung der Technikauswahl die folgende Aufgaben:

a) Formulieren Sie implizit, d. h. ohne konkrete Zahlen, das vollständige lineare mathematische Modell mit dem Ziel der Maximierung des Gesamtnutzens unter Berücksichtigung der Budget- und Platzrestriktionen. Benutzen Sie dabei folgende Variable und Parameter:

- x_i : Menge von Ausstattungsgegenstand i
- c_i : Kosten für Ausstattungsgegenstand i
- h_i : Platzbedarf von Ausstattungsgegenstand i
- u_i : Nutzen von Ausstattungsgegenstand i
- B : Gesamtbudget
- K : Gesamtkapazität an Einbauplätzen

b) Bill Works erklärte, dass bezüglich der Technikauswahl die folgenden Restriktionen R1 bis R3 zu berücksichtigen sind. Ergänzen Sie das Modell aus Aufgabenteil 3 a) um die entsprechenden mathematischen Formulierungen.

- (R1) Es müssen mindestens 10 Datensicherungs-Geräte angeschafft werden. Dabei ist unerheblich, ob es sich um Geräte vom Typ „Tape“ oder „Hard“ handelt.

- (R2) Zusätzliche Prozessoren können nur im Server vom Typ „Bud“ verbaut werden, wobei maximal 3 zusätzliche Prozessoren je Server verbaut werden können.
- (R3) Wenn ein Speichersystem vom Typ „Lilly“ angeschafft wird, dann muss je Speichersystem „Lilly“ auch ein Server vom Typ „Joe“ angeschafft werden.



Aufgabe 4	25 Punkte
------------------	------------------

Die BLUESCREEN AG betreibt einen Server, der Kunden (KD) online Dienstleistungen anbietet. Die Kunden können die Kundenanfragen elektronisch stellen und ein Server ist in der Lage, diese automatisiert abzuarbeiten. Neu eingehende Kundenanfragen reihen sich an das Ende einer Warteschlange ein. Der Server arbeitet die Warteschlange nach dem FIFO Prinzip ab.

Der Vorstand für Operations Research der BLUESCREEN AG, Michael Queue, war neulich auf einem Vortrag zur stochastischen Simulation, bei welcher unter anderem über Warteschlangenmodelle referiert wurde. Er ist mit der aktuellen Abarbeitung der Kundenanfragen (M, M, 1, ∞, FIFO) nicht zufrieden, da es kunden-seitige Beschwerden über zu lange Bearbeitungszeiten gab. Um eine bessere Übersicht zur Ist-Situation zu erhalten, führt Michael Queue eine Vergangenheitsbetrachtung durch und gewinnt dadurch folgende Informationen:

- Es gehen je Minute 2 Kundenanfragen ein (Ankunftsrate α).
- Der Server kann je Minute 1 Kundenanfrage beantworten. (Bedienrate β).

- a) Beschreiben Sie mit Stichworten die Bedeutung der einzelnen Elemente des angegebenen Warteschlangenmodells (M, M, 1, ∞, FIFO)!
- b) Bestimmen Sie die fehlenden Werte der nachfolgenden Simulation für die Kunden 8-10 (Tableau auf dem Lösungsbogen Seite 7).

KD_i	a_i	$t_i = \sum_{j=1}^i a_j$	b_i	$\sum_{j=1}^i b_j$	e_i	w_i	$\sum_{j=1}^i w_j$
1	0,06	0,06	0,16	0,16	0,22	0,00	0,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	1,10	1,90	0,42	6,06	6,12	3,80	15,18
8	0,08		0,07				
9	0,01		0,45				
10	0,11		0,36				

Zur Erläuterung der Symbolik:

- KD_i ... Kunde i .
- a_i ... Zwischenankunftszeit des i -ten Kunden.
- $t_i = \sum_{j=1}^i a_j$... Ankunftszeitpunkt des i -ten Kunden.
- b_i ... Bediendauer des i -ten Kunden.
- $\sum_{j=1}^i b_j$... Gesamtbedienzeit.
- e_i ... Bedienende des i -ten Kunde.
- w_i ... Wartezeit des i -ten Kunden.
- $\sum_{j=1}^i w_j$... Gesamte Wartezeit.

- c) Michael Queue konnte eine wesentliche Verbesserung der Bearbeitungszeit vom Server erzielen. Nun können 3 Kundenanfragen je Minute beantwortet werden. Die Verbesserung wirkt sich wie folgt aus:

KD_i	a_i	$t_i = \sum_{j=1}^i a_j$	b_i	$\sum_{j=1}^i b_j$	e_i	w_i	$\sum_{j=1}^i w_j$
1	0,06	0,06	0,05	0,05	0,11	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	0,11	2,1	0,12	2,31	2,41	0,19	3,06

Bestimmen Sie auf Basis der Tabelle den Auslastungsgrad, die mittlere Schlänglänge und die mittlere Wartezeit des Servers.

Auslastungsgrad	
Mittlere Schlänglänge	
Mittlere Wartezeit	

- d) Es wurden 30 Simulationen durchgeführt und folgende Werte ermittelt.

Mittlere Wartezeit	0,66
Standardabweichung s_{30}	0,187

Darüber hinaus sind folgende Werte der Fläche unterhalb der Dichtekurve der Standardnormalverteilung bekannt.

$u_{1-\alpha/2}$	$\Phi^*(u_{1-\alpha/2})$
1,95	0,9488
2,00	0,9545

Wie lautet das Konfidenzintervall für die tatsächliche mittlere Wartezeit, wenn eine Wahrscheinlichkeit von 95% unterstellt werden soll? Hinweis: Bestimmen Sie den Wert für $u_{1-\alpha/2}$ per Interpolation. Runden Sie den ermittelten Wert für $u_{1-\alpha/2}$ auf 3 Nachkommastellen.





LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: Modul 31811
Planen mit mathematischen Modellen

Termin: 20.09.2017

Prüfer: Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

Name, Vorname :
Matrikelnummer :

Aufgabe	1	2	3	4					Summe
maximale Punktzahl	25	38	12	25					100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften
der Prüfer:

Hinweise für die Bearbeitung

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt und den Kopf der Lösungsbögen aus.
- Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden.
- Die Lösungen müssen in dem vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseite, und geben Sie einen deutlichen Hinweis hierauf.
- Bedenken Sie, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird.
- Die Klausur umfasst 4 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten ist.
- Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden.

- **Zugelassene Hilfsmittel für diese Klausur:**

Die Verwendung eines Taschenrechners ist dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der drei folgenden Modellreihen angehört:

- Casio fx86 oder Casio fx87,
- Texas Instruments TI 30 X II,
- Sharp EL 531.

Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert.

Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Sie selbst überprüfen, indem Sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.**

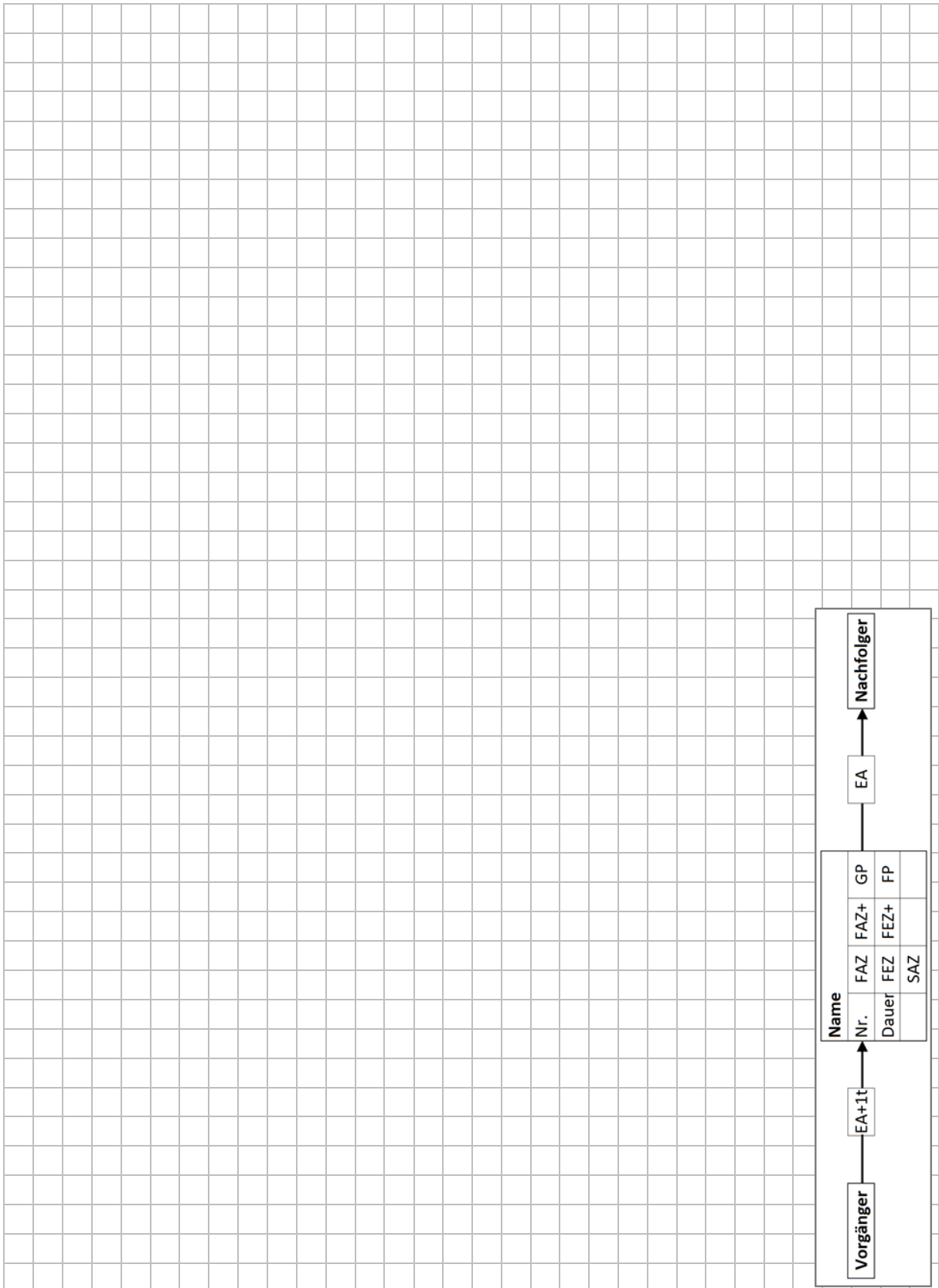
Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben zugelassen. Die Kurse dürfen Markierungen und textbezogene Anmerkungen enthalten.

- Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

Lösung zu Aufgabe 1

a)



Lösung zu Aufgabe 1 (Fortsetzung)

b)

c)

Lösung zu Aufgabe 2

a)

i.

ii.

iii.

iv.

Lösung zu Aufgabe 2 (Fortsetzung)
--

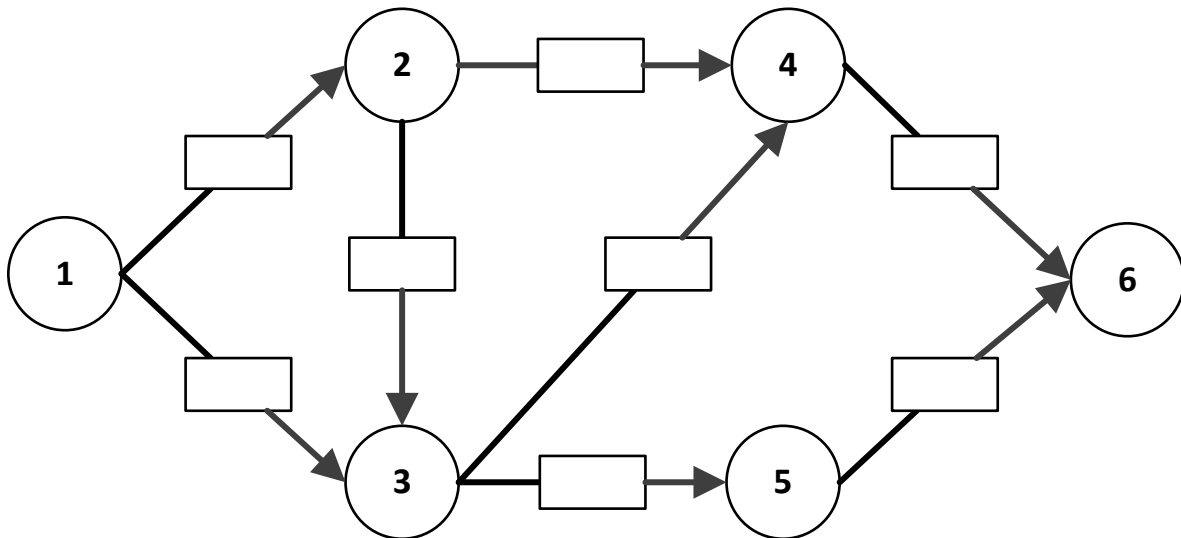
b) *Anmerkung: Im Tableau entsprechen s_1, \dots, s_8 und h_1, \dots, h_4 Schlupf- bzw. Hilfsvariablen.*

Bearbeitungshinweis: Das Pivotelement im ersten Tableau haben wir Ihnen bereits vorgegeben (grau unterlegt). Unterhalb der Kriteriumzeile und außerhalb der RHS dürfen Sie – wie im vorgegebenen Tableau – aus Vereinfachungsgründen auf das Eintragen von 0-Werten verzichten.

	x_0	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{34}	x_{35}	x_{46}	x_{56}	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	h_1	h_2	h_3	h_4	RHS
x_0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	200
h_1		-1		1	1													1				0
x_{35}							1								1							100
x_{46}					-1			1						1						1		100
x_{56}									1						1						1	100
s_1		1								1												200
s_2											1			-1		-1			1			0
s_3				1								1										100
s_4					1								1									100
x_{34}						1								1								100
x_{13}			1											1	1					-1		200
s_7					1									-1		1					-1	200
s_8															-1							100

Lösung zu Aufgabe 2 (Fortsetzung)

c)



Die maximale Datenflusskapazität beträgt Gbit/s.

d)

i.

ii.

Lösung zu Aufgabe 3

a)

b)

Lösung zu Aufgabe 4

a)

b)

KD_i	a_i	$t_i = \sum_{j=1}^i a_j$	b_i	$\sum_{j=1}^i b_j$	e_i	w_i	$\sum_{j=1}^i w_j$
1	0,06	0,06	0,16	0,16	0,22	0,00	0,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	1,10	1,90	0,42	6,06	6,12	3,80	15,18
8	0,08		0,07				
9	0,01		0,45				
10	0,11		0,36				

Zur Erläuterung der Symbolik:

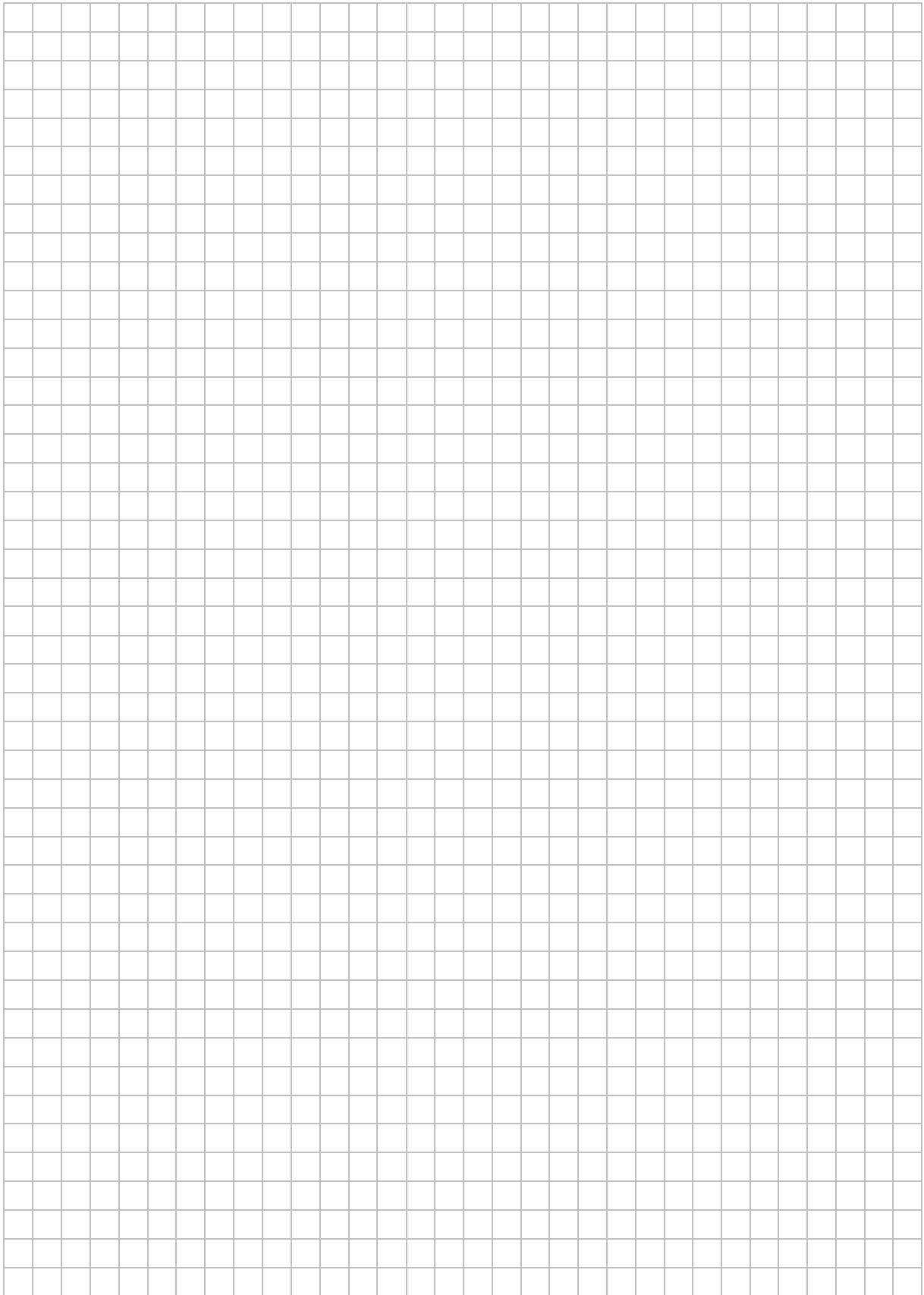
- KD_i ... Kunde i .
- a_i ... Zwischenankunftszeit des i -ten Kunden.
- $t_i = \sum_{j=1}^i a_j$... Ankunftszeitpunkt des i -ten Kunden.
- b_i ... Bediendauer des i -ten Kunden.
- $\sum_{j=1}^i b_j$... Gesamtbedienzeit.
- e_i ... Zeitpunkt des Bedienen des i -ten Kunde.
- w_i ... Wartezeit des i -ten Kunden.
- $\sum_{j=1}^i w_j$... Gesamte Wartezeit.

c)

Auslastungsgrad	
Mittlere Schlängenlänge	
Mittlere Wartezeit	

d)

Zusätzliche Seite 1; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.



Zusätzliche Seite 2; Bezug zu den Aufgaben bitte deutlich machen.

