Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden
und Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

AUFGABENTEIL

Klausur:	**Modul 32621** **Optimierungsmethoden des Operations Research**
Termin:	**20.09.2018**
Prüfer:	**Prof. Dr. Andreas Kleine**

Aufgabe 1	**25 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
min & x_0 = & 3x_1 & + & 6x_2 & & \\
\text{u. d. N.} & & x_1 & + & x_2 & \geqq & 6 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & \geqq & 12 \\
& & & & x_2 & \geqq & 2 \\
& & & x_1, & x_2 & \geqq & 0
\end{array}
$$

a) Stellen Sie das zugehörige duale LOP auf.

b) Lösen Sie das **primale** LOP unter Berücksichtigung sämtlicher Nebenbedingungen graphisch. Geben Sie eine optimale Lösung sowie hierzu den Zielfunktionswert an.

c) Überführen Sie das **primale** LOP in das äquivalente Maximierungsproblem und bestimmen Sie mittels der dualen Simplex-Methode eine optimale Lösung. Geben Sie ausgehend von der Berechnung *jeweils* für das **primale** und das zugehörige **duale** LOP die optimale Lösung einschließlich Zielfunktionswert an.

Aufgabe 2	**30 Punkte**

Bäckermeister *Kalle Knusprig* betreibt in der Welterbestadt Quedlinburg im Harz eine traditionelle Backstube. Der Marktdruck durch die omnipräsenten Großbäckereien zwingt auch *Kalle Knusprig* zur Optimierung seines Backprogrammes. Zunächst soll das Segment der Ofenbrote optimiert werden. Die Bäckerei stellt mit Blick auf die Stadtgeschichte die Brotsorten König Heinrich I. (B_1), Kaiser Otto I. (B_2) und Heilige Mathilde (B_3) her. Alle Brote werden traditionell aus Sauerteig und einer geheimen Gewürzmischung hergestellt, d. h. ausschließlich Weizenmehl (R_1) und/oder Roggenmehl (R_2), Hefe (R_3), Gewürzen (R_4) und Wasser (R_5). Der Bedarf an Zutaten sowie die Backzeit im Ofen (W_1) je Brotsorte können der nachstehenden Tabelle entnommen werden:

	W_1 (h)	R_1 (kg)	R_2 (kg)	R_3 (g)	R_4 (g)	R_5 (ml)
B_1	1,0	1	0	84	30	1.000
B_2	1,5	0	2	168	60	2.000
B_3	1,0	1	1	84	50	2.000

Die Stückdeckungsbeiträge je Brot betragen für B_1 1,50 €, für B_2 2,50 € und für B_3 2,00 € . Für die Produktion verfügt die Bäckerei über einen Steinbackofen mit 40 Backplätzen, welche von jeder Brotsorte belegt werden können. Der Ofen ist täglich für 5 Stunden zum Backen von Broten reserviert. Ist auf einem Backplatz ein Brot fertig gebacken, kann es unabhängig von den anderen noch im Ofen befindlichen Broten durch ein noch nicht gebackenes Brot ersetzt werden. Dabei wird angenommen, dass der Wechsel auf einem Backplatz keine Zeit beansprucht. Je Tagesproduktion können von R_1 140 kg und von R_2 200 kg vorgehalten werden. Hefe (R_3), Gewürze (R_4) und Wasser (R_5) stehen in beliebiger Menge zur Verfügung.

a) Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Deckungsbeitrag auf.

  Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Variable x_i, welche die herzustellende Menge des Brotes B_i angibt ($i = 1, 2, 3$). Achten Sie auf die Dimensionen! Das Hinzufügen von Ganzzahligkeitsbedingungen ist nicht notwendig!

b) Ergänzen Sie das vollständige Modell aus Aufgabenteil (*a*) um notwendige Schlupfvariable und stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf. Bestimmen Sie anschließend eine Lösung, in dem Sie maximal 3 Simplexschritte ausführen. Markieren Sie jeweils das Pivot-Element.

c) Geben Sie Ihre in Aufgabenteil (*b*) berechnete Lösung vollständig und einschließlich Zielfunktionswert an. Bewerten Sie Ihre Lösung hinsichtlich Optimalität und interpretieren Sie die Größen ökonomisch.

d) Neben Broten kommen bei *Kalle Knusprig* natürlich auch allerlei Kuchensorten in den Steinbackofen. Ausgerechnet der im Ofen karamellisierende Zuckerkuchen schmeckt seinen Kunden besonders gut, sodass Knusprig häufig Sonderaufträge annimmt. *Kalle Knusprig* interessiert nun *brennend*, wie stark er die täglich zur Verfügung stehende Backzeit variieren kann, ohne dass sich die Struktur seines Produktionsprogramms ändert.

d1) Geben Sie zunächst die Inverse B^{-1} der optimalen Basis an.

d2) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse durch und berechnen Sie das kritische Intervall $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ für die zum Backen der Brote verfügbare Zeitkapazität.

d3) Bleibt die bereits in Aufgabenteil (*c*) ermittelte Basislösung optimal, falls sich die Schwankungen auf bis zu 1 Stunde um den Wert des zur Verfügung stehenden Zeitfensters von 5 Stunden belaufen? Interpretieren Sie hierzu das kritische Intervall in Bezug auf eine bereits berechnete optimale Basislösung.

e) Abschließend geht es um eine betriebswirtschaftliche Bewertung: Das in Aufgabenteil (*a*) entwickelte Modell berücksichtigt ganz offensichtlich nicht sämtliche Aspekte der Realität. Überlegen Sie, welche Faktoren gegebenenfalls in einem erweiterten Optimierungsmodell Beachtung finden sollten. Geben Sie zwei Möglichkeiten an und begründen Sie diese kurz. (*Hinweis: Berechnungen oder konkrete Modellierungen sind nicht erforderlich!*)

Aufgabe 3	**15 Punkte**

Die Berufsfeuerwehr ist in Hagen mit 2 Feuer- und Rettungswachen, 2 Rettungswachen sowie 2 Notarztstationen vertreten. Die Amtsleitung in der Leitstelle hat Ihr Logistikunternehmen beauftragt, die monatliche Versorgung aller Wachen und Stationen mit technischer Ausrüstung zu übernehmen. Insgesamt reicht es aus, wenn Sie hierfür eine Fahrt mit nur einem Lastkraftwagen einplanen. Der Unternehmensstandort V_1 liegt glücklicherweise genau an der Leitstelle. Die Entfernungen (in km) zwischen den Standorten V_i und V_j $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sind in folgender Entfernungsmatrix gegeben:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} - & 9 & 12 & 18 & 10 & 7 \\ 9 & - & 5 & 4 & 0,5 & 6 \\ 12 & 5 & - & 8 & 6 & 4,5 \\ 18 & 4 & 8 & - & 5 & 9,5 \\ 10 & 0,5 & 6 & 5 & - & 9 \\ 7 & 6 & 4,5 & 9,5 & 9 & - \end{pmatrix}$$

Ausgehend von V_1 ist es Ihr Ziel, alle $n = 6$ Standorte anzufahren, ohne einen der Standorte zweimal zu besuchen, und dabei die insgesamt zurückgelegte Strecke zu minimieren. Es handelt sich hier folglich um ein klassisches Rundreiseproblem.

a) Verwenden Sie den im Kurs angegebenen Greedy-Algorithmus, um ein minimales Gerüst zu bestimmen; verdeutlichen Sie dabei, in welcher Reihenfolge Kanten akzeptiert bzw. verworfen werden. Zeichnen Sie das minimale Gerüst und geben Sie an, welchen Wert dieses Gerüst hat.

b) Sei nun der Knoten V_1 ausgezeichnet. Wie sieht der entsprechende minimale 1-Baum aus; lässt sich bei der Erzeugung des minimalen 1-Baumes das Vorgehen aus Teilaufgabe *a*) zunutze machen? Welchen Wert hat nun dieses Gerüst?

c) Erläutern Sie mit wenigen Worten die Bedeutung des minimalen 1-Baumes für das vorgestellte Problem.

Aufgabe 4	**15 Punkte**

Die Stadt Hagen plant, die Standorte ihrer Feuer- und Rettungswachen neu zu strukturieren, um die entsprechenden Pflichtaufgaben der Stadt Hagen insgesamt kostenminimal zu erbringen. Es werden für die Überdeckung des städtischen Gebietes – bestehend aus fünf Stadtbezirken – sechs Grundstücke als potentielle Standorte in Betracht gezogen. Die Erreichbarkeiten der fünf Stadtbezirke von den sechs Grundstücken ist der Matrix $\mathbf{A}$ zu entnehmen, wobei der Zeilenindex i, mit $i = 1, 2, 3, 4, 5$, die Stadtbezirke nummeriert und der Spaltenindex j, mit $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, die Grundstücke. Ein Element $a_{ij} = 1$ gibt also an, dass die Feuerwehr von dem Grundstück j den entsprechenden Stadtbezirk i in angemessener Zeit erreichen kann; diese angemessene Zeit wird auch Hilfsfrist genannt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die monatlichen Betriebskosten der Feuerwehren (in tausend €) können dem Kostenvektor $\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 35 & 40 & 60 & 45 \end{pmatrix}$ entnommen werden; die Investitionskosten der neuen Standorte und die Abrisskosten der alten werden hier vernachlässigt.

a) Formulieren Sie ein mathematisches Optimierungsmodell für das gegebene (unreduzierte) Überdeckungsproblem. Verwenden Sie hierzu die Variable x_j, die den Betrieb der Feuerwehr j angibt ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

b) Warum sollte die Feuerwehr $j = 5$ zwingend betrieben werden? Begründen Sie sowohl formal als auch inhaltlich!

c) Reduzieren Sie – soweit möglich – die Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe der Ihnen bekannten Reduktionsregeln. Notieren Sie jeden einzelnen Schritt mit der dort angewandten Regel sowie die dadurch zu streichenden Spalten und Zeilen. Die in dem Kurs in den jeweiligen Regeln verwendete Notation der Indizes, wie beispielsweise k, i, j, i^*, ist dabei unbedingt einzusetzen.

d) Welche Feuerwehren werden betrieben, und wie hoch fallen die monatlichen Betriebskosten insgesamt aus?

Aufgabe 5 **15 Punkte**

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte A und B her. Aufgrund von Kapazitäts- und Absatzbeschränkungen sind folgende Nebenbedingungen zu beachten:

$$\begin{array}{rcrcl} x_A & & & \leqq & 90 \\ & & x_B & \leqq & 50 \\ x_A & + & 3x_B & \leqq & 180 \\ 2x_A & + & x_B & \leqq & 160 \\ x_A & + & 7x_B & \geqq & 210 \\ & x_A, & x_B & \geqq & 0 \end{array}$$

wobei x_A bzw. x_B die herzustellende Menge (in 10.000 Stück) von Produkt A bzw. Produkt B sei. Der Erlös von Produkt A liegt bei 50 €/Stück, der von Produkt B bei 30 €/Stück.

Für das Unternehmen arbeiten zwei Handelsvertreter. Vertreter 1 vertreibt das Produkt A und verfolgt das Ziel z_1 der Umsatzmaximierung von Produkt A. Demgegenüber verfolgt Vertreter 2 das Ziel z_2 der Umsatzmaximierung von Produkt B.

a) Formulieren Sie das lineare Vektormaximierungsproblem (LVMP).

b) Stellen Sie die Lösungsmenge von (LVMP) graphisch dar.

c) Ermitteln Sie die individuell optimalen Lösungen von (LVMP) und geben Sie die Menge der individuell optimalen Lösungen formal an.

d) Das Controlling stellt fest, dass der Deckungsbeitrag von Produkt A mit 5 €/Stück negativ ist und der von Produkt B bei 10 €/Stück liegt.

d1) Ermitteln Sie graphisch das Produktionsprogramm, das den Gesamtdeckungsbeitrag maximiert:

$$\mathrm{DB}(x_A, x_B) = -5x_A + 10x_B.$$

Geben Sie die herzustellende Menge von den Produkten A und B sowie den maximalen Deckungsbeitrag an.

d2) Der Controller des Unternehmens behauptet, dass die unter *d1)* ermittelte optimale Lösung funktional-effizient sei, denn schließlich handele es sich um eine Zielgewichtung mit

$$\Psi(x_A, x_B) = \sum_{q=1}^{2} t_q z_q(x_A, x_B) = -5z_1(x_A, x_B) + 10z_2(x_A, x_B)$$

und die Zielgewichtung liefert stets funktional-effiziente Lösungen.

Ist die Aussage zutreffend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden
und Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 32621**
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: **20.09.2018**

Prüfer: **Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				**Summe**
maximale Punktzahl	25	30	15	15	15				100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften
der Prüfer:

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621

1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!

2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigefügten Lösungsbogen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerten.

3. Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.

4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben**.

5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:

   - Casio fx86 oder Casio fx87,
   - Texas Instruments TI 30 X II,
   - Sharp EL 531.

   Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.

7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.

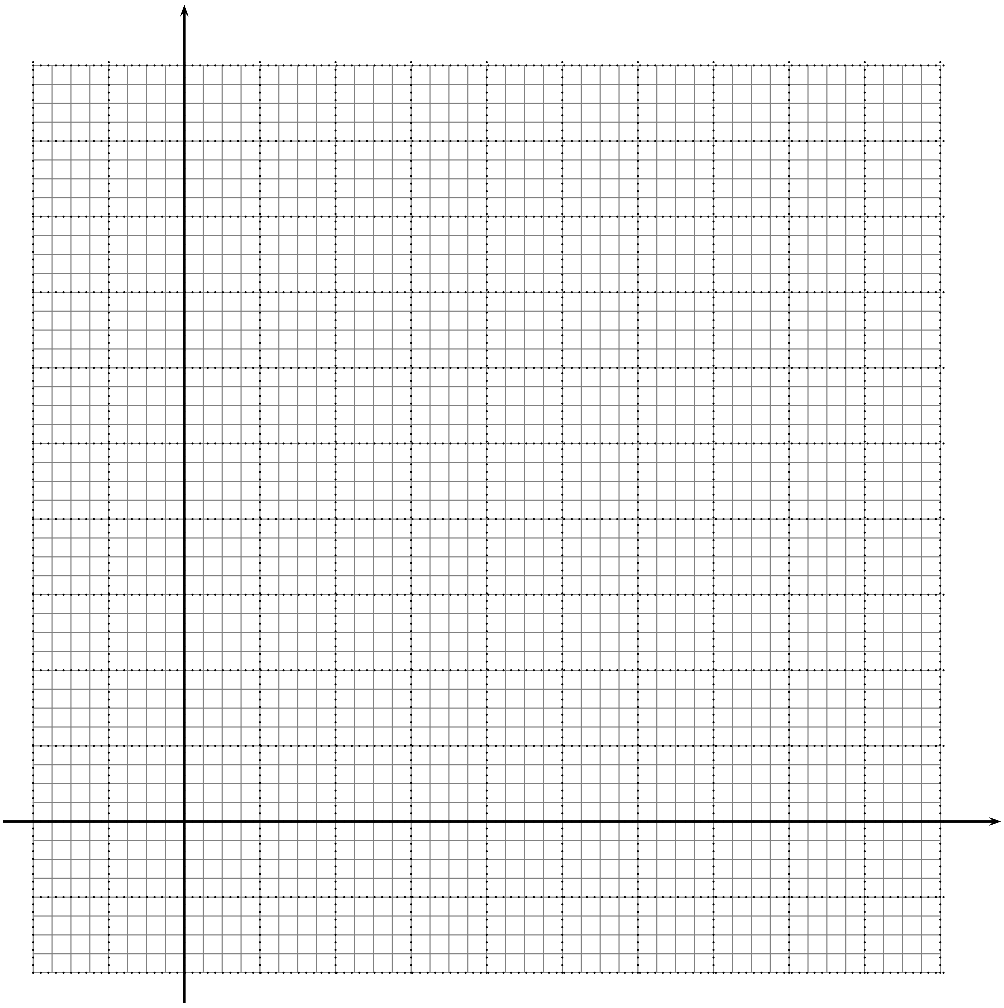
8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)



Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

Forts. c)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

b)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

d)

d1)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ________________________________

Forts. d)

d2)

d3)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ____________________________

e)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ________________________________

a)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

b)

c)

Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)

Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

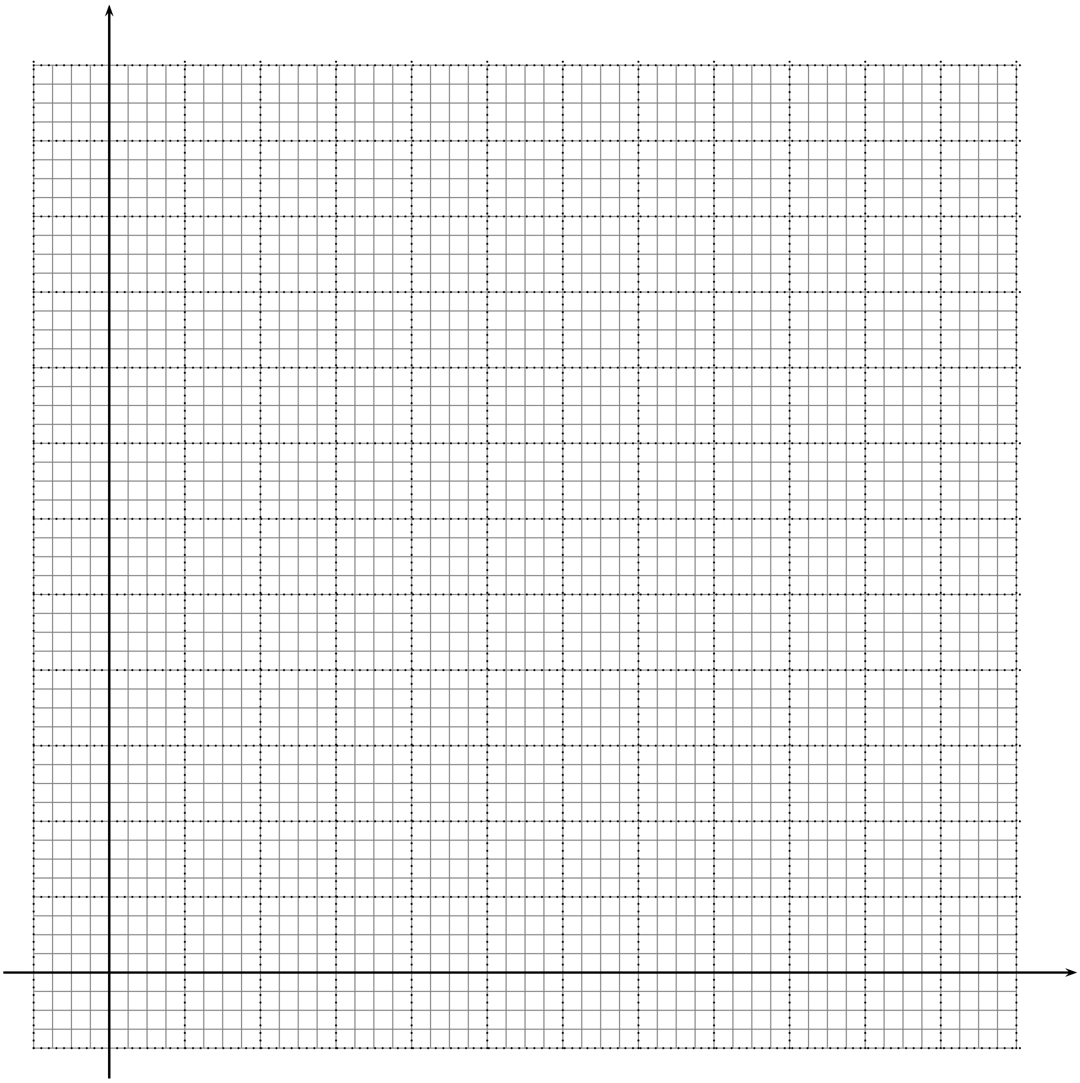
d)

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ________________________________

a)

b)



Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

d)

d1) *Lösungshinweis: Die graphische Lösung können Sie in der Graphik von Aufgabenteil 5b) vornehmen. Kennzeichnen Sie diese jedoch deutlich!*

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

Forts. d)

d2)

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ________________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ________________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ________________________________

Punkte

Punkte