FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden
und Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

AUFGABENTEIL

Klausur:	**Modul 32621** **Optimierungsmethoden des Operations Research**
Termin:	**19.09.2019**
Prüfer:	**Prof. Dr. Andreas Kleine**

Aufgabe 1 **16 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{lrrrrrr} \min & x_0 = & 3x_1 & + & 12x_2 & & \\ \text{u. d. N.} & & x_1 & + & 2x_2 & \geqq & 8 \\ & & -x_1 & + & x_2 & \geqq & -2 \\ & & & & x_2 & \geqq & 0 \end{array}$$

a) Lösen Sie das LOP unter Berücksichtigung sämtlicher Nebenbedingungen grafisch! Kennzeichnen Sie den zulässigen Lösungsraum sowie die optimale Lösung. Geben Sie den Lösungsvektor für die ermittelte optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert an.

b) Stellen Sie zum LOP aus Aufgabenteil *a)* das zugehörige *duale* LOP auf!

c) Lösen Sie das duale LOP aus Aufgabenteil *b)* unter Berücksichtigung sämtlicher Nebenbedingungen grafisch! Kennzeichnen Sie auch hier den zulässigen Lösungsraum sowie die optimale Lösung. Geben Sie den Lösungsvektor für die ermittelte optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert an.

d) Erläutern Sie kurz anhand der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen *a)* und *c)* das so genannte *Complementary Slackness*-Theorem.

Aufgabe 2 **12 Punkte**

Spediteur Bert Brummi möchte seinen Fuhrpark erneuern. Der Kraftstoffverbrauch der Flotte ist für Bert der größte Kostentreiber. Für den Austausch seiner Fahrzeugflotte besteht das Ziel von Bert darin, den Verbrauch des Fuhrparks an Kraftsoff zu minimieren. Zur Bedienung seiner Frachtanforderungen stehen 4 Fahrzeugtypen zur Verfügung:

Modell i / Eigenschaft	Zugmaschine NAM	Zugmaschine FAD	Kastenwagen T12	Kastenwagen T7
Anschaffungskosten (€)	110.000	90.000	50.000	40.000
Gesamt-Laufleistung (km)	1.000.000	1.000.000	500.000	500.000
Verbrauch (l/100 km)	30	32	23	18
Nutzlast (t)	30	30	8	6

Für den Investitionszeitraum stehen zudem folgende Angaben zur Verfügung:

- Jede Zugmaschine (Sattelzugmaschine) benötigt einen Sattelauflieger. Bert verfügt über 30 Auflieger, wobei nicht jeder Auflieger zum Einsatz kommen muss.
- Die durch den Fuhrpark gleichzeitig abzudeckende Transportkapazität muss mindestens 1.200 Tonnen betragen.
- Für die Anschaffung der Fahrzeuge steht Bert ein Budget von maximal 10 Mio. Euro zur Verfügung.
- Es ist bekannt, dass im Investitionszeitraum insgesamt mindestens 40 Mio. Kilometer gefahren werden. Dabei wird unterstellt, dass jedes angeschaffte Fahrzeug die Gesamt-Laufleistung erreicht.

a) Stellen Sie ein lineares Optimierungsmodell zur Bestimmung der Zusammenstellung des Fuhrparks auf, sodass der Gesamtverbrauch aller Fahrzeuge in Litern unter den gegebenen Beschränkungen minimal wird! Erläutern Sie kurz die von Ihnen verwendeten Variablen.

b) In der Regel wird der Durschnittsverbrauch des Fuhrparks je 100 km betrachtet; beispielsweise für jeweils eine Zugmaschine vom Typ NAM und FAD: $\left(30\,[\frac{l}{100\,km}] + 32\,[\frac{l}{100\,km}]\right) / 2 = 31\,[\frac{l}{100\,km}]$. Interpretieren Sie Ihre in Aufgabenteil *a)* aufgestellte Zielfunktion und einen möglichen Zielfunktionswert mit Blick auf die Zielstellung, den Durchschnittsverbrauchs des Fuhrparks zu minimieren!

Aufgabe 3	**15 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
\max & x_0 = & 12x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & & \\
\textbf{u. d. N.} & & 4x_1 & & & + & 12x_3 & \leqq & 240 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leqq & 120 \\
 & & & & 4x_2 & + & 5x_3 & \leqq & 60 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geqq & 0
\end{array}$$

a) Stellen Sie zum gegebenen LOP das zugehörige Ausgangstableau für den Simplex-Algorithmus auf! Ermitteln Sie anschließend eine optimale Lösung für das LOP, indem Sie den Simplex-Algorithmus auf das Ausgangstableau anwenden. Kennzeichnen Sie für jeden Simplex-Schritt das Pivotelement. Geben Sie abschließend die optimale Lösung einschließlich Zielfunktionswert an!

b) Interpretieren Sie die in Aufgabenteil *a)* ermittelte Lösung anhand des zuletzt aufgestellten Tableaus ökonomisch, indem Sie die ermittelten Werte exemplarisch an einem geeigneten betriebswirtschaftlichen Beispiel erläutern!

Aufgabe 4 **7 Punkte**

Für ein lineares Optimierungsproblem der Form

$$\max\{\mathbf{c^T x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \text{ mit } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$$

sei folgendes Endtableau gegeben, wobei gegenüber dem Ausgangstableau kein Spaltentausch stattgefunden hat:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
$23\frac{1}{2}$	0	0	0	$3\frac{3}{4}$	20	0	475
2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	-2	0	50
$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	5
1	1	0	0	0	1	0	20
$-1\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	-1	1	10

Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse bezüglich der rechten Seite für $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 0)^T$ durch, indem Sie folgende Teilaufgaben bearbeiten:

a) Ermitteln Sie die Basisinverse $\mathbf{B^{-1}}$ sowie die Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{v}}$.

b) Bestimmen Sie das kritische Intervall $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ für gegebenes $\mathbf{v}$.

c) Erläutern Sie kurz die Bedeutung der von Ihnen ermittelten Lösung für $\mathbf{b} = (100, 20, 20, 35)^T$.

Aufgabe 5	**16 Punkte**

Lotta ist neue Mitarbeiterin am BWL-Lehrstuhl für quantitative Methoden und Wirtschaftsmathematik (BWLQUAM). Um Ihren Einstand zu geben, möchte Lotta Ihre Backkünste unter Beweis stellen. Bei der Planung Ihrer Einkäufe stellt Lotta fest, dass die verfügbare freie Kapazität K Ihres Kühlschranks zur Aufbewahrung der Zutaten knapp bemessen ist. Außerdem steht aus Ihrer Haushaltskasse höchstens ein Budget B zur Verfügung. Zusätzlich hat Lotta für jede Zutat i einen bewerteten Nutzen u_i, den Platzbedarf k_i und den Preis p_i ermittelt. Diese Angaben beziehen sich jeweils auf eine zu beschaffende Verpackungseinheit der Zutat i. Sowohl beim Magerquark als auch bei der Mascarpone ist zu berücksichtigen, dass Lotta entweder eine Verpackungseinheit kauft oder nicht. Von allen anderen Zutaten können auch mehrere Pakete (Verpackungseinheiten) gekauft werden.

Es kommen folgende Zutaten i in Betracht, die – wenn gekauft – auch im Kühlschrank gelagert werden müssen:

Zutat i	1	2	3	4
Bezeichnung	Erdbeeren	Stachelbeeren	Mandarinen	Magerquark
Zutat i	5	6	7	8
Bezeichnung	Mascarpone	Joghurt	Milch	Eier

Helfen Sie Lotta, Ihren Einkauf zu planen:

a) Stellen Sie das mathematische Modell zur Maximierung des Gesamtnutzens U des Kühlschrankinhalts unter Berücksichtigung des Budgets B und der verfügbaren freien Kapazität K auf. Benennen Sie den Grundtypus des vorliegenden diskreten Optimierungsmodells!

b) Nennen Sie ein aus dem Kurs bekanntes Lösungsverfahren zur Ermittlung einer optimalen Lösung des Modells aus Aufgabenteil *a)*. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

c) Das Basismodell könnte hinsichtlich des Kuchenbackens eine wenig brauchbare Lösung erzeugen. Formulieren Sie daher nachfolgende Anforderungen als zusätzliche Nebenbedingungen:

i) Unabhängig vom Kuchen, benötigt Lotta mindestens 10 Eier.

ii) Je Packung Stachelbeeren erhöht sich die Anzahl der Eier um 2 Stück.

iii) Wenn Lotta Mascarpone einkauft, muss Sie auch Margerquark einkaufen.

d) Lotta sagt: Ohne Milch kein Kuchen, d. h. Milch soll in jedem Fall eingekauft werden. Wie ist die Zielfunktion aus Aufgabenteil *a)* anzupassen, um diesen Sachverhalt zu berücksichtigen?

e) Lotta hat noch Prosecco im Kühlschrank. Sie könnte eine oder mehrere Flaschen x_{ps} aus dem Kühlschrank entnehmen. Je Flasche Prosecco würde die freie Kapazität im Kühlschrank um k_{ps} erhöht, zugleich jedoch der Gesamtnutzen des Kühlschranks um u_{ps} reduziert. Ergänzen Sie das Modell aus Aufgabenteil *a)*, sodass Lotta bis zu 3 Flaschen aus dem Kühlschrank entnehmen kann.

Aufgabe 6 **15 Punkte**

Für ein rein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem der Form

$$\max\{\mathbf{c^T x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \text{ ganzzahlig}\}$$

mit den drei Schlupfvariablen $s_1,\ s_2$ und s_3 sei nach Relaxierung der Entscheidungsvariablen und Anwendung des Simplex-Algorithmus folgendes optimales Tableau gegeben, wobei – wie ersichtlich – die rechte Seite die Ganzzahligkeitsbedingung nicht erfüllt:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	0	$\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	0	$31\frac{1}{4}$
0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$7\frac{3}{4}$
1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	1	2	1	35

Wenden Sie das 1. Gomory-Verfahren mit Parameter $h = 1$ an, um eine optimale, rein-ganzzahlige Lösung zu erzeugen. Ermitteln Sie hierzu zunächst formal die Schnittebenenrestriktion, bevor Sie das Verfahren in einem entsprechenden Simplex-Tableau darstellen und fortführen. Geben Sie abschließend die optimale Lösung einschließlich Zielfunktionswert an.

Aufgabe 7	**19 Punkte**

Eine Werbeagentur betreut die Einführung eines neuen Produktes. Für das Onlinemarketing wurde ein sogenannter A/B-Test (*split test*) durchgeführt, bei dem zwei mögliche Varianten *A* und *B* einer Werbeaktion bezüglich ihrer Werbewirkung vergleichend getestet wurden. Der A/B-Test wurde mit vier Zielgruppen durchgeführt. Die Werbewirkung ist in Punkten auf einer Skala von 0 bis 12 erfasst, wobei mehr Punkte eine höhere Werbewirkung bedeuten. Die Ergebnisse sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

Gruppe i / Reichweite	1	2	3	4
Werbeaktion A	1	5	3	3
Werbeaktion B	1	4	2	1

Jede Werbeaktion lässt sich mehrfach durchführen, aber auch beliebig aufteilen. Damit stellt sich für die Werbeagentur die Frage, in welchem Verhältnis das in Anspruch genommene Werbebudget aufzuteilen ist. Insgesamt steht ein Werbebudget in Höhe von 112 Geldeinheiten (GE) zur Verfügung. Es ist bekannt, dass die Kosten für Werbeaktion *A* je Werbewirkungspunkt 4 GE sowie für Aktion *B* 8 GE betragen. Entsprechend der Skala ist die Reichweite der Aktionen *A* und *B* nach oben auf maximal 12 Punkte beschränkt.

Unterstützen Sie die Werbeagentur, indem Sie nachstehende Aufgaben bearbeiten:

a) Stellen Sie ein lineares Vektormaximierungsproblem (LVMP) auf, welches die Werbewirkung für jede einzelne Zielgruppe unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion sowie maximal zu erreichenden Punkte je Werbeaktion maximiert. Verwenden Sie zur Vereinfachung für die durchzuführenden Werbeaktionen *A* und *B* die Entscheidungsvariablen x_A und x_B.

b) Stellen Sie den Zulässigkeitsraum des LVMP grafisch dar. Ermitteln Sie anschließend anhand Ihrer Grafik für jede Gruppe i den individuell optimalen Zielfunktionsvektor z_i und stellen Sie alle Zielfunktionsvektoren tabellarisch gegenüber!

c) Bewerten Sie kurz die in Aufgabenteil *b)* erhaltene Lösung mit Blick auf die Entscheidungsunterstützung der Werbeagentur. Welche Empfehlung zur Aufteilung des Werbebudgets können Sie der Werbeagentur mit den vorliegenden Informationen geben?

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 32621**
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: **19.09.2019**

Prüfer: **Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Summe**
maximale Punktzahl	16	12	15	7	16	15	19	100
erreichte Punktzahl								

Gesamtpunktzahl: **Note:**

Datum: Unterschrift des Prüfers:

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621

1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!

2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigefügten Lösungsbogen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerten.

3. Die Klausur umfasst 7 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.

4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben**.

5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:

   - Casio fx86 oder Casio fx87,
   - Texas Instruments TI 30 X II,
   - Sharp EL 531.

   Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z. B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.

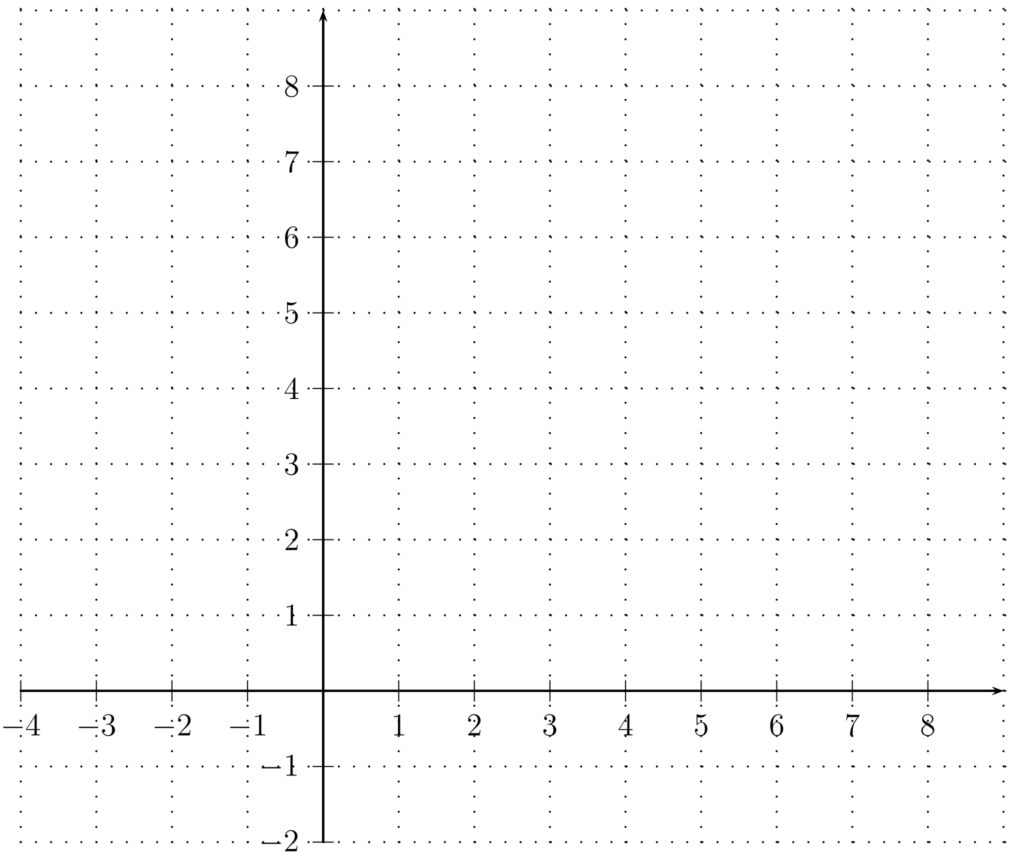
7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten von Ihnen bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.

8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

a)



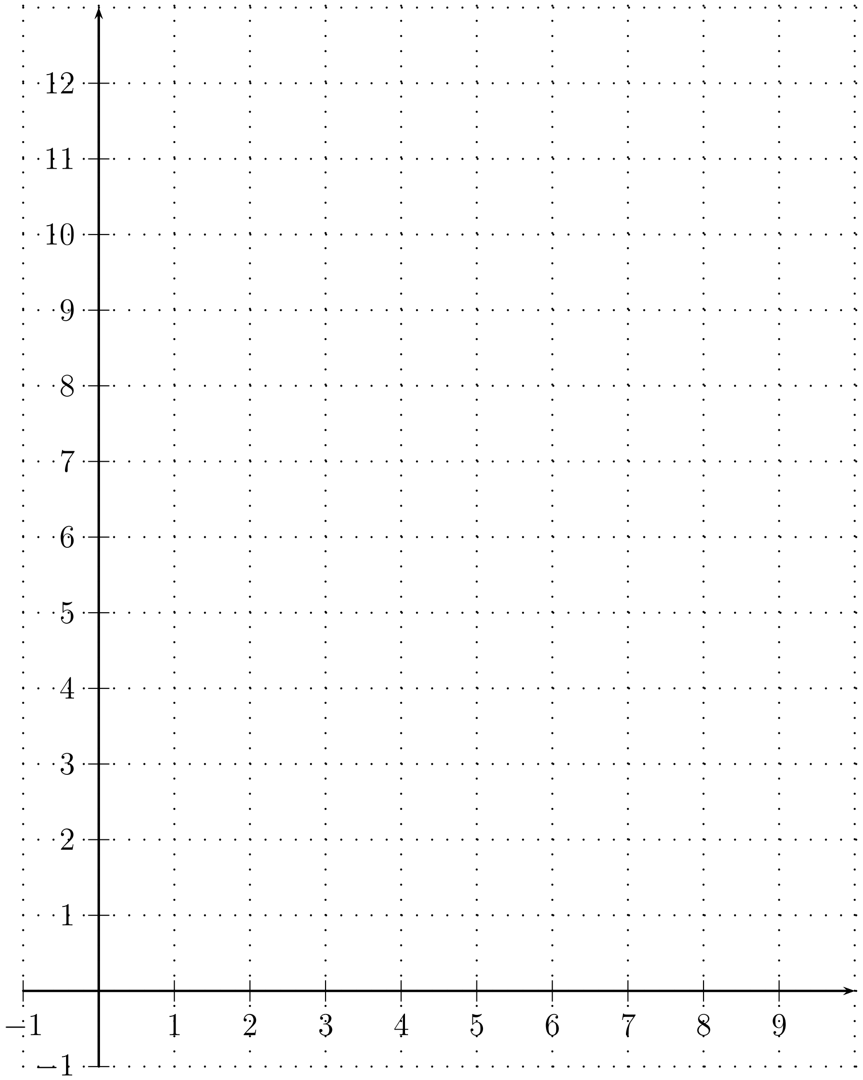
Optimale Lösung:

b)

Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

c)



Optimale Lösung:

Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

d)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

b)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

Optimale Lösung:

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

b)

Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)

c)

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)

c)

i)

ii)

iii)

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

d)

Punkte

✎ Aufgabe **6** Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe **6** Matr.-Nr.: ______________________________

(Forts. Aufg. 6)

Punkte

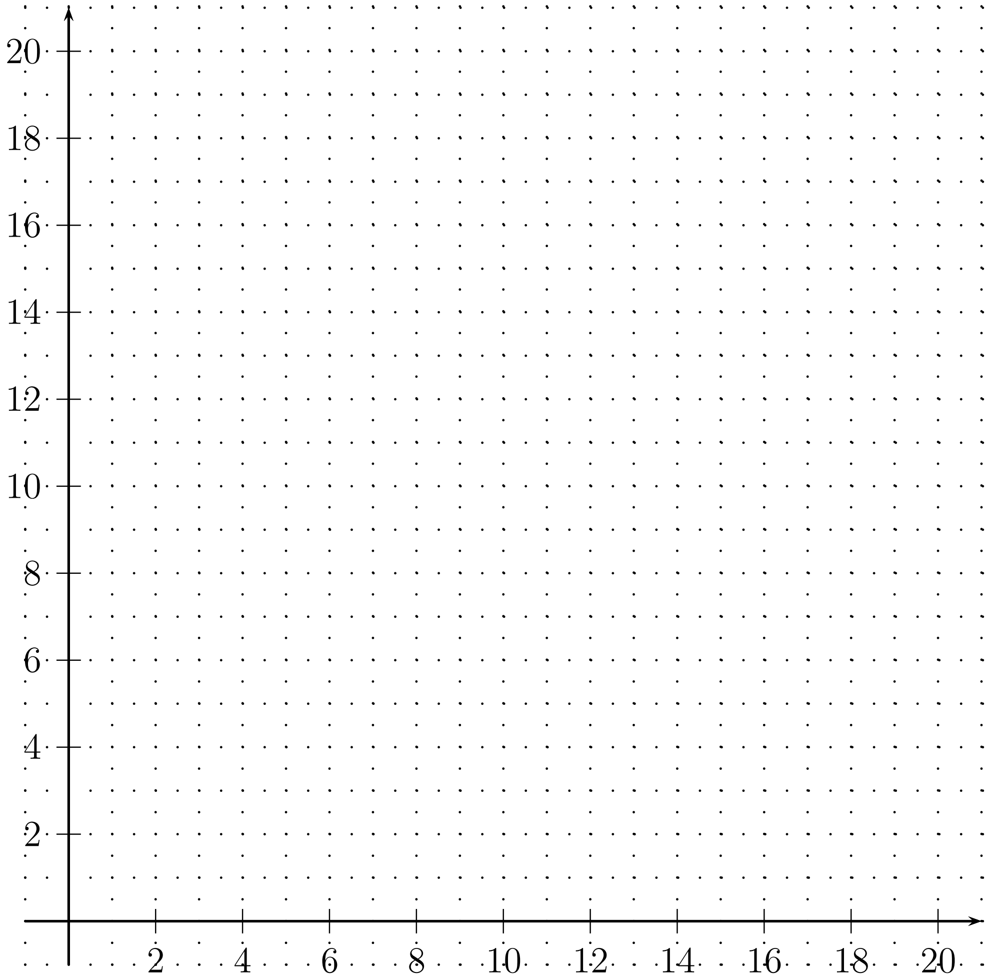
✎ Aufgabe **7** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

Punkte

✎ Aufgabe **7** Matr.-Nr.: ______________________________

b)



Punkte

✎ Aufgabe **7** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ___ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

Punkte