



AUFGABENTEIL

—
Klausur: **Modul 32621**
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: **15.03.2018**

—
Prüfer: **Prof. Dr. Andreas Kleine**

Aufgabe 1

25 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rcll} \min & x_0 = & 28x_1 & + & 32x_2 & + & 5x_3 & & \\ \text{u.d.N.} & & 3x_1 & + & 6x_2 & & & = & 7 \\ & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ & & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- a) Stellen Sie das zugehörige duale LOP auf.
- b) Lösen Sie das **duale** LOP unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen graphisch. Geben Sie eine optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert hierzu an.
- c) Bestimmen Sie mittels des „LO-Algorithmus für Probleme mit nach oben beschränkten Variablen“ eine optimale Lösung für das **duale** LOP unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingungen. Geben Sie die berechnete optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an.

Aufgabe 2

35 Punkte

Die Tischlerei „Feinschliff GmbH“ stellt vier Holzprodukte her: Wandregale (E_1), Küchenarbeitsplatten (E_2), Stuhlbeine (E_3) und Sitzflächen (E_4). Dazu stehen dem Unternehmen pro Tag 253 Minuten für Sägearbeiten (R_1), 225 Minuten für Schleifarbeiten (R_2) und 150 Minuten für Lackierarbeiten (R_3) zur Verfügung. Der Arbeitsminutenverbrauch je Mengeneinheit (ME) der einzelnen Erzeugnisse ist in nachstehenden Tabelle zusammengefasst:

	E_1	E_2	E_3	E_4
R_1	5	6	1	2
R_2	5	5	1	2
R_3	2	3	2	4

Der mit dem Verkauf je ME erzielbare Gewinn der einzelnen Holzprodukte beträgt für E_1 16 €, für E_2 22 €, für E_3 10 € und für E_4 25 €.

- a) Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Gewinn auf.

Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Variable x_i , welche die herzustellende Menge des Erzeugnisses E_i angibt ($i = 1, 2, 3, 4$). Das Hinzufügen von Ganzzahligkeitsbedingungen ist nicht notwendig!

- b) Die Stuhlbeine E_3 und Sitzflächen E_4 werden vom Unternehmen nur in Form eines Hockers, der aus einer Sitzfläche und drei Stuhlbeinen besteht, verkauft. Ergänzen Sie das unter a) formulierte Modell um eine entsprechende lineare Nebenbedingung, die diesen Zusammenhang mathematisch ausdrückt.

- c) Welche **Vereinfachung** ergibt sich unmittelbar aus b)? Passen Sie das formulierte Modell entsprechend an.

Hinweis: Nutzen Sie die neu hinzugefügte Nebenbedingung!

- d) Ergänzen Sie das Modell aus Aufgabenteil c) um notwendige Schlupfvariable und stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf. Markieren Sie das Pivot-Element.

Hinweis: Bezeichnen Sie dabei die Schlupfvariable der Arbeitszeitrestriktion R_i mit s_i ($i = 1, 2, 3$).

- e) Vervollständigen Sie die Simplextableaus auf Seite 15 der Lösungsbögen zur Bestimmung der optimalen Lösung des Problems.
- f) Geben Sie Ihre in Aufgabenteil e) berechnete optimale Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an. Welche Mengen der vier Holzserzeugnisse werden dabei hergestellt? Wie hoch ist der Gewinn? Was lässt sich über die zur Verfügung stehenden Arbeitsminuten aussagen? Beachten Sie hierbei die Hinweise in den Aufgabenteilen a) und d) bzgl. der Variablen!
- g) Aufgrund von Maschinenstörungen können die zur Verfügung stehenden Schleifarbeitsminuten (R_2) kurzfristig um den Wert 225 schwanken.
- g1) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse durch und berechnen Sie das kritische Intervall $[\lambda_{Min}, \lambda_{Max}]$.
- g2) Bleibt die bereits in Aufgabenteil e) ermittelte Basislösung optimal, falls sich die Schwankungen von R_2 auf bis zu 15 Minuten um den Wert von 225 Minuten belaufen? Interpretieren Sie hierzu das kritische Intervall in Bezug auf eine bereits berechnete optimale Basislösung.

Aufgabe 3

15 Punkte

Die Feinschliff GmbH produziert zusätzlich Fußleisten (Variable x_1), Kanthölzer (Variable x_2) und Dachlatten (Variable x_3) als Meterware. Da Endkunden diese gerne mit Ihren PKWs transportieren möchten, werden die Erzeugnisse auf genau ein- einhalb Meter zugeschnitten. Das folgende lineare Programm beschreibt bereits den Herstellprozess:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_0 = 25x_1 + 19x_2 + 16x_3 \\ \text{u.d.N.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 14 \\ & x_i \geq 0 \quad \text{ganzzahlig } (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Dabei gibt die Zielfunktion den erzielbaren Gewinn mit dem Verkauf in € je ME an. Die erste Nebenbedingung (NB) beschreibt eine Kapazitätsrestriktion für das zur Verfügung stehende Holz in kg. Die zweite NB bildet die nötige Bearbeitungszeit in Stunden beim Zuschnitt ab. Wichtig ist, dass nur ganze Erzeugnisse geplant werden sollen.

Helfen Sie der Tischlerei und lösen Sie die rein-ganzzahlige Optimierungsaufgabe mit dem ersten Gomoryverfahren, indem Sie wie folgt vorgehen:

- a) Für das **relaxierte** Problem ist auf S. 18 der Lösungsbögen das optimale Simplextableau gegeben. Leiten Sie aus der ersten Restriktionszeile die zugehörige Schnittebenenrestriktion ab und schreiben Sie diese formal in Form einer linearen Nebenbedingung auf.
- b) Berechnen Sie die optimale Lösung unter Beachtung der Ganzzahligkeit.
- c) Wie viele eineinhalb Meter lange Produkten der jeweiligen Typen werden produziert? Wie hoch ist der hierbei erzielte maximale Gewinn? Was kann im Optimum über die einzuhaltenden Restriktionen ausgesagt werden.

Aufgabe 4

10 Punkte

In der Tischlerei sind für die kommende Woche fünf Individualaufträge angenommen worden, die von insgesamt sechs entsprechend qualifizierten Mitarbeitern bearbeitet werden können. Hierzu ist die Matrix \mathbf{A} gegeben, wobei die Zeilen i für die jeweiligen Aufträge $i = 1, 2, 3, 4, 5$ stehen und $a_{ij} = 1$ in einer Spalte j dafür, dass der betreffende Mitarbeiter $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ die Fähigkeit zur Bearbeitung besitzt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch den Vektor $\mathbf{c}^T = (200 \ 300 \ 400 \ 500 \ 100 \ 200)^T$ sind die jeweiligen Personalkosten in € für die sechs Mitarbeiter gegeben. Das Ziel ist eine kostenminimale Bearbeitung aller fünf Individualaufträge.

- a) Formulieren Sie ein mathematisches Optimierungsmodell für das gegebene (unreduzierte) Partitionsproblem. Verwenden Sie hierzu die Variable x_j , welche den Einsatz des Mitarbeiters j angibt ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).
- b) Reduzieren Sie die Matrix \mathbf{A} mit Hilfe der Ihnen bekannten Reduktionsregeln soweit wie möglich. Notieren Sie jeden einzelnen Schritt mit der dort angewandten Regel sowie die aufgrund dieser gestrichenen Spalten und Zeilen. Die in den jeweiligen Regeln erwähnten Indizes wie beispielsweise k, i, j, i^* sind dabei unbedingt anzugeben.
- c) Welche Mitarbeiter werden eingesetzt und wie hoch ist der Personalkostenaufwand hierfür?

Aufgabe 5

15 Punkte

Gegeben sei folgendes (LVMP):

$$\max z(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N

$$2x_1 + 3x_2 \leq 22$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 23$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$2 \leq x_1 \leq 7$$

$$x_2 \geq 0$$

- a) Stellen Sie die Lösungsmenge von (LVMP) graphisch dar. Markieren Sie die Menge aller zulässigen Lösungen.
- b) Bestimmen Sie in der Grafik für jedes der drei Ziele die individuell optimalen Lösungen. Geben Sie jeweils die Menge der individuell optimalen Lösungen sowie den optimalen Zielvektor **formal** an.
- c) Ermitteln Sie anhand der Grafik die Menge der funktional-effizienten Lösungen von (LVMP) und geben Sie die Menge der vollständigen Lösungen formal an.
- d) Angenommen, es gilt zusätzlich $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^2$. Geben Sie an, ob $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine funktional-effiziente Alternative darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: Modul 32621
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: 15.03.2018

Prüfer: Prof. Dr. Andreas Kleine

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5				Summe
maximale Punktzahl	25	35	15	10	15				100
erreichte Punktzahl									

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschriften
der Prüfer:

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621


1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbögen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!
2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigelegten Lösungsbögen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerfen.
3. Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben.**
5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:
 - Casio fx86 oder Casio fx87,
 - Texas Instruments TI 30 X II,
 - Sharp EL 531.

Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.

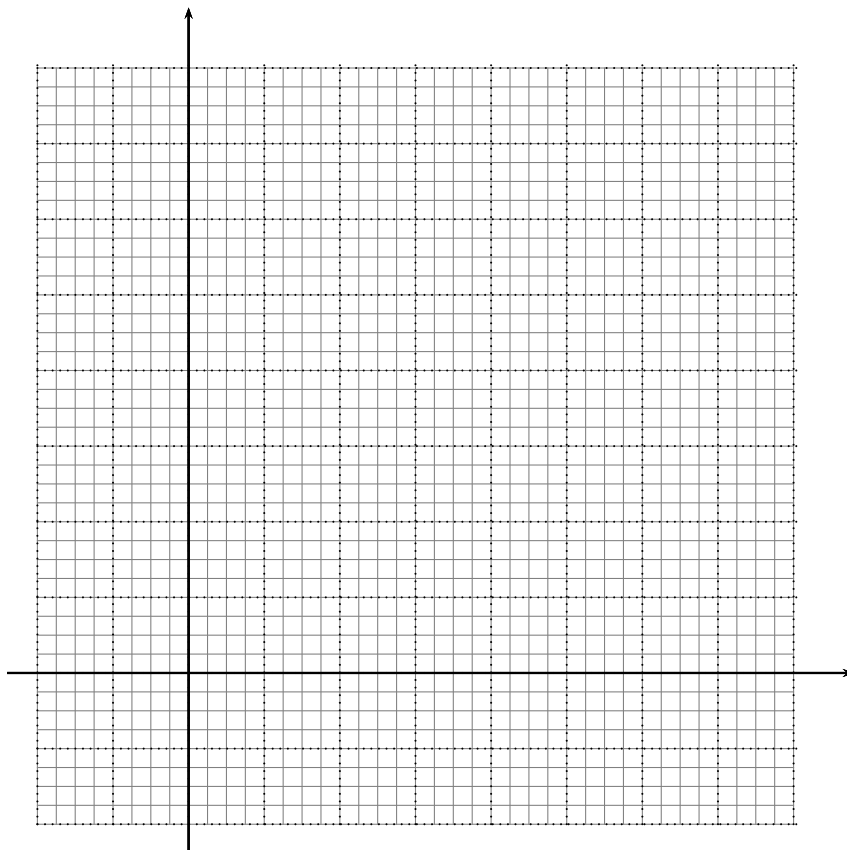
6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.
7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.
8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!


 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: _____

a)

b)




Punkte

 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: _____

c)


Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: _____

e)


x_0	x_1	x_2	x_4	s_1	s_2	s_3	b
1	-5	$-\frac{11}{2}$	0	0	0	$\frac{11}{2}$	825
0	4	$\frac{9}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	178
0	4	$\frac{7}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	150
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	15

Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: _____

f)


Punkte

 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: _____

a)

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
1	0	$\frac{70}{17}$	0	$\frac{30}{17}$	$\frac{61}{17}$	$\frac{1454}{17}$
0	0	$\frac{23}{17}$	1	$\frac{5}{17}$	$-\frac{4}{17}$	$\frac{44}{17}$
0	1	$\frac{1}{17}$	0	$-\frac{2}{17}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{30}{17}$

Punkte


 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: _____

b)

--	--	--


c)

Punkte

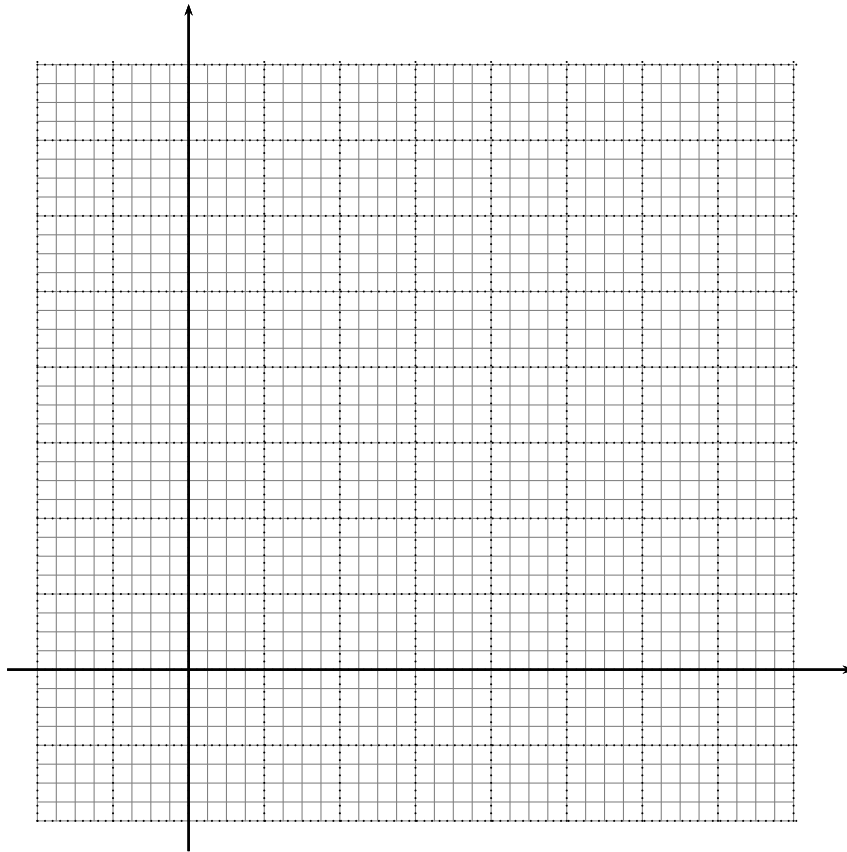
 Aufgabe 4 Matr.-Nr.: _____

c)

Punkte

 Aufgabe 5 Matr.-Nr.: _____

a)



b)


Punkte

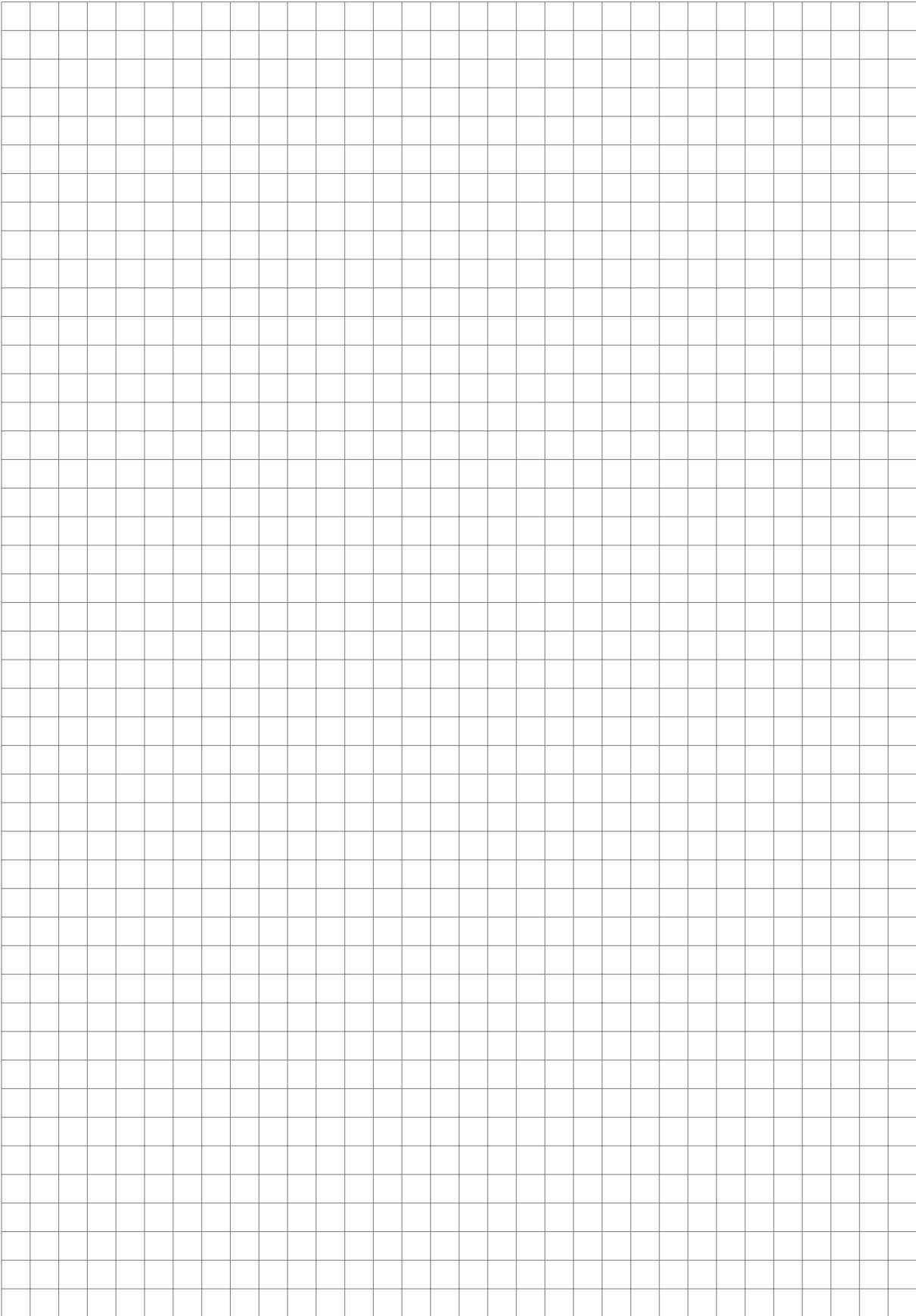
 Aufgabe 5 Matr.-Nr.: _____

c)


d)

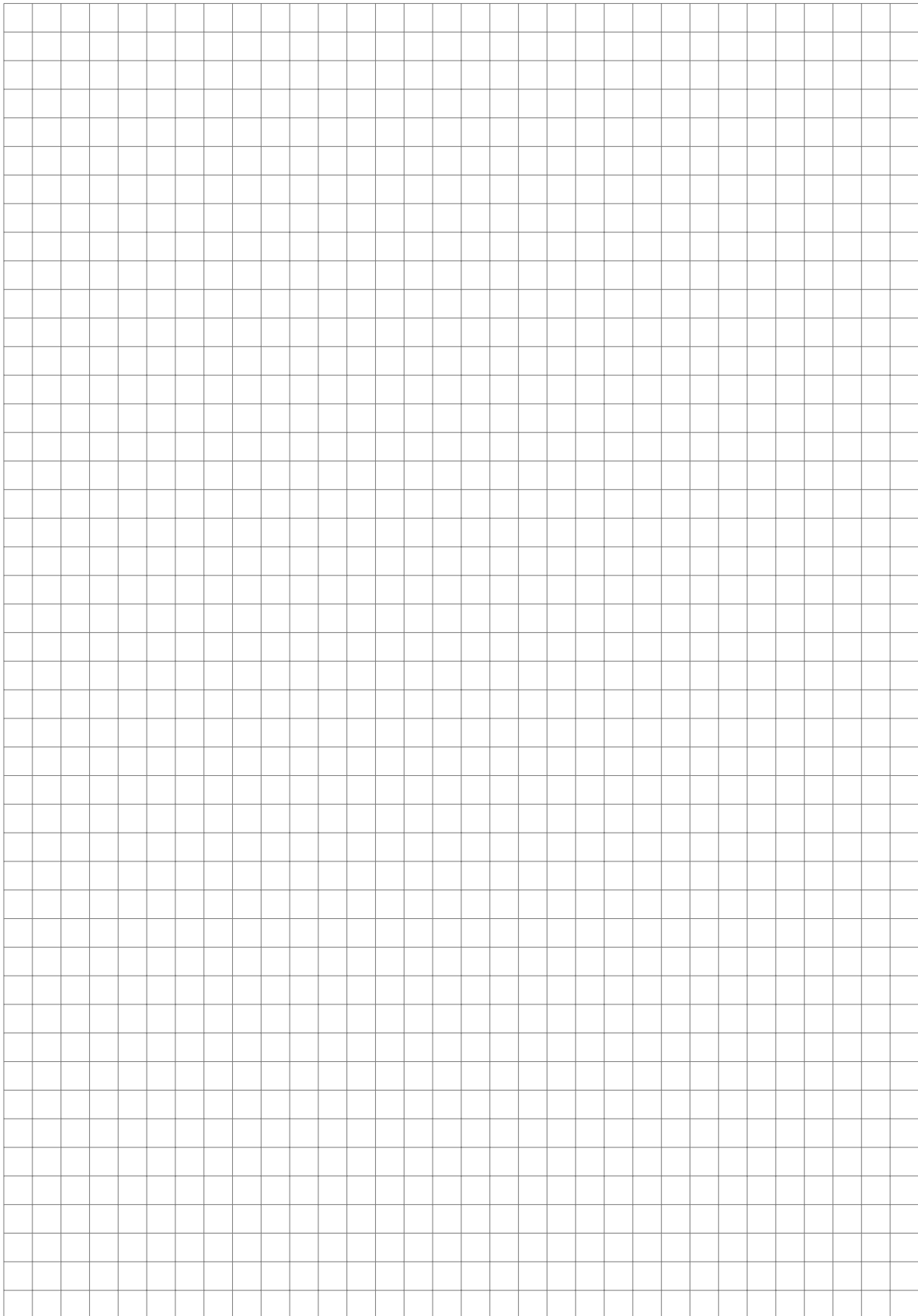
Punkte

 Aufgabe ____ Matr.-Nr.: _____




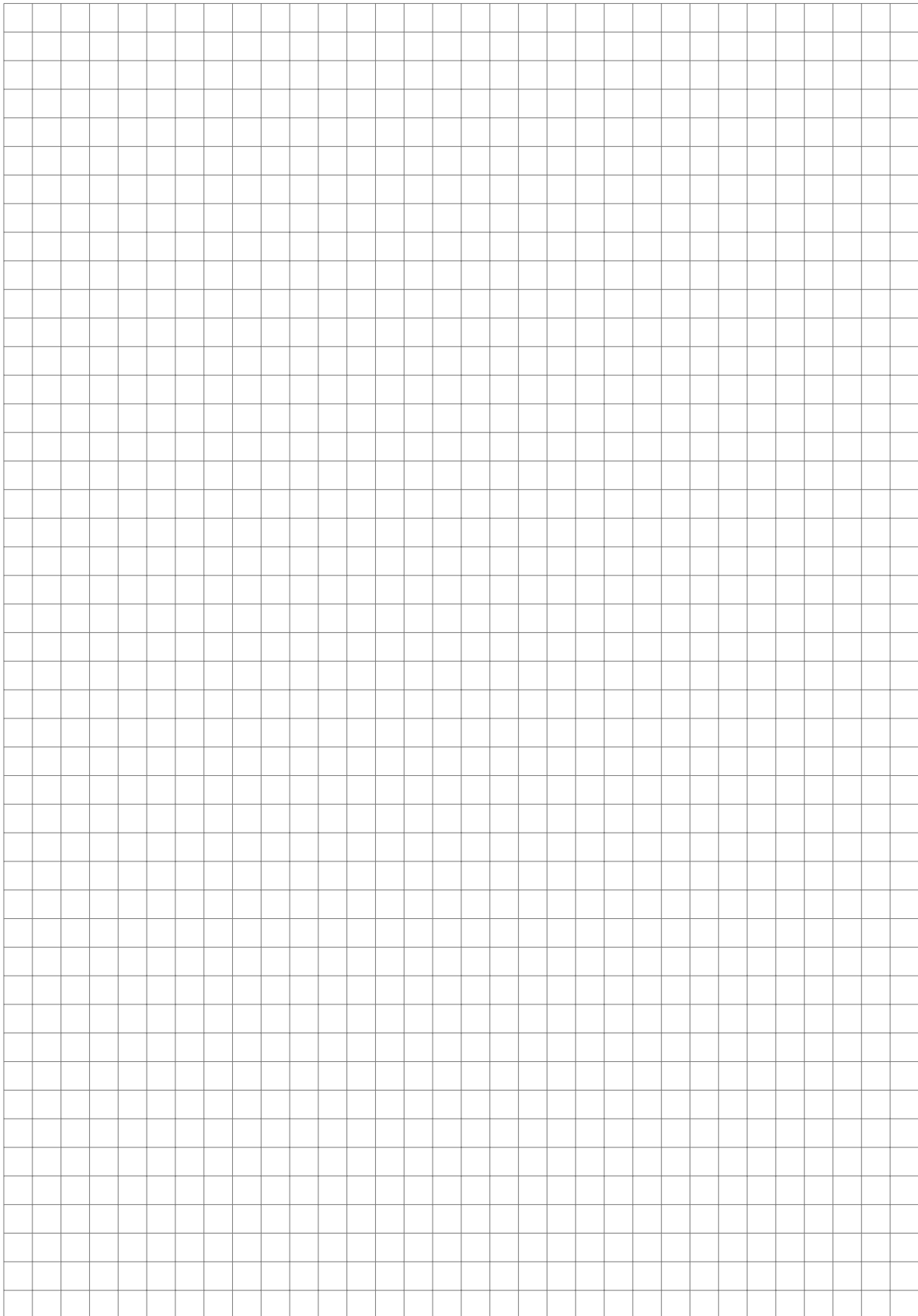
Punkte

 Aufgabe ____ Matr.-Nr.: _____




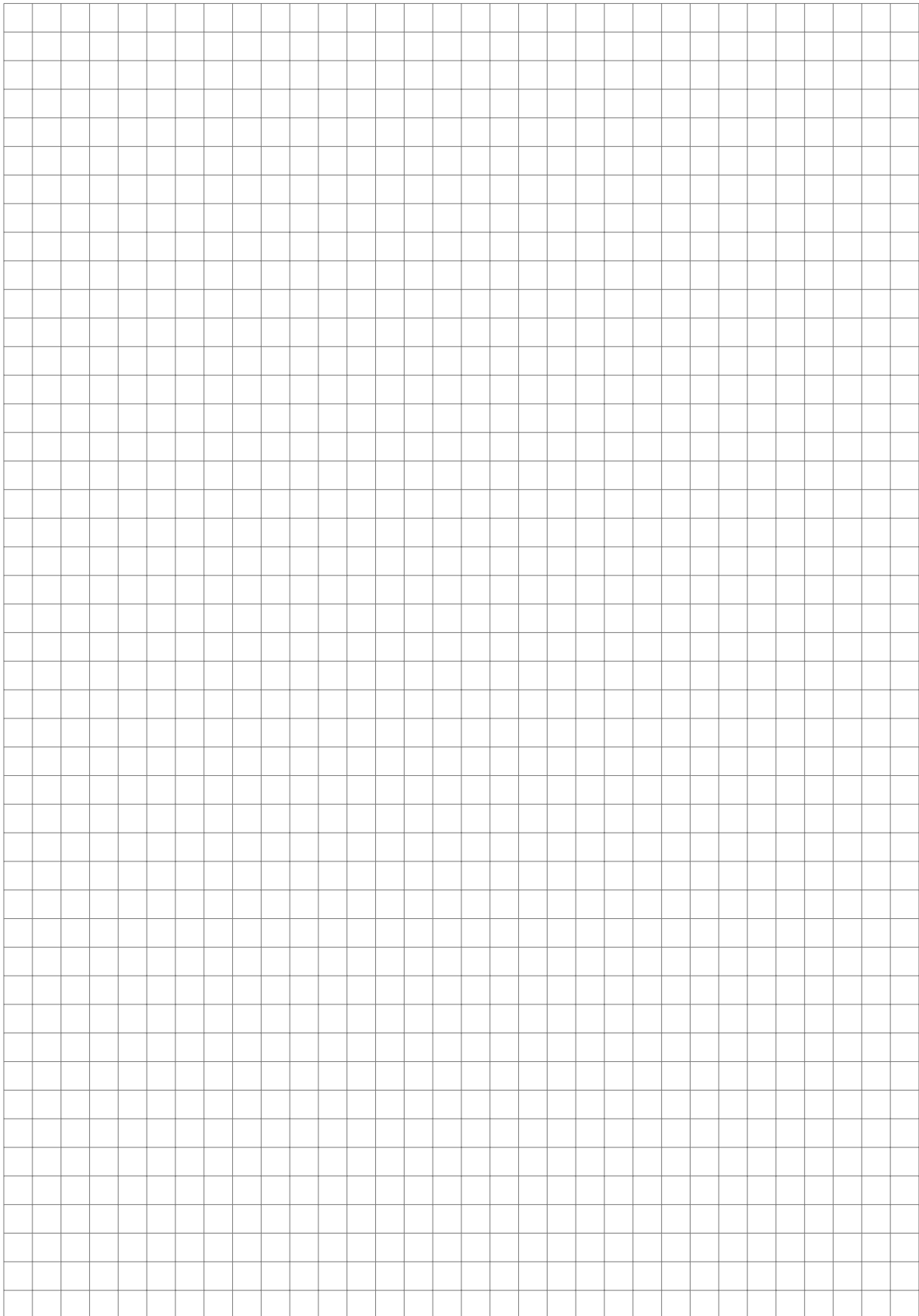
Punkte

 Aufgabe ____ Matr.-Nr.: _____



Punkte

 Aufgabe ____ Matr.-Nr.: _____



Punkte