



## AUFGABENTEIL

**Klausur:** Modul 32621  
Optimierungsmethoden des Operations Research

**Termin:** 21.03.2019

**Prüfer:** Prof. Dr. Andreas Kleine

**Aufgabe 1**

**22 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rcll} \max & x_0 = & x_1 & + & 3x_2 \\ \text{u. d. N.} & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & \frac{3}{2}x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- a) Lösen Sie das LOP unter Berücksichtigung sämtlicher Nebenbedingungen graphisch! Kennzeichnen Sie dabei die Nebenbedingungen, die Zielfunktion einschließlich der Richtung der Verschiebung, den zulässigen Lösungsraum sowie die optimale Lösung. Geben Sie den Lösungsvektor für die ermittelte optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert an.
- b) Streichen Sie stark-redundante Restriktionen aus dem LOP und stellen Sie anschließend das zugehörige *duale* LOP auf!
- c) Stellen Sie zum *dualen* LOP aus Aufgabenteil b) das zugehörige Ausgangstableau für den Simplex-Algorithmus auf!
- d) Beurteilen Sie das in Aufgabenteil c) erstellte Simplex-Tableau bezüglich primaler und dualer Zulässigkeit. Begründen Sie Ihre Antwort kurz!
- e) Ermitteln Sie eine optimale Lösung für das *duale* LOP, indem Sie den Dualen Simplexalgorithmus auf das Simplex-Tableau in Aufgabenteil c) anwenden. Kennzeichnen Sie für jeden Simplex-Schritt das Pivotelement. Geben Sie abschließend die optimale Lösung einschließlich Zielfunktionswert an!

**Aufgabe 2**

**30 Punkte**

Die japanische Teehändlerin *Yuna Sakura Yamamoto* möchte mit ihren edlen japanischen Tees auch den deutschen Markt erobern. Aus einer Marktstudie weiß Sie, dass die Deutschen gerne aromatisierte Tees konsumieren und nur eine kleinere Zielgruppe auf das pure Geschmackserlebnis japanischer Grüntees setzt. Ganz in der Tradition ihres Namens möchte *Yuna Sakura* einen Kirschblütentee herstellen, welcher auch in den späten Abendstunden noch bekömmlich ist. Um Schwankungen im Geschmack zu minimieren, muss *Yuna* einen sogenannten Blend mischen. Dazu können Grünteesorten mit Kirschblüten gemischt werden. Für jede Zutat ist ein Geschmackswert, Koffein-Gehalt und Einkaufspreis bekannt. Der Geschmackswert soll den Beitrag zu einem exzellenten Geschmack wiedergeben - je höher desto besser.

Zutat $i$	Teesorte / Zutat	Geschmackswert (Punkte/100 g)	Koffeingehalt (mg/100 g)	Einkaufspreis (€/100 g)
1	Gyokuro	8	4	24
2	Karigane	4	1	10
3	Sencha	1	3	5
4	Kirschblüten	1	0	10

Es soll eine Mischung von höchstens 1000 g hergestellt werden. Dabei sind folgende Bedingungen einzuhalten: Der Koffeingehalt der Mischung darf nicht mehr als 50 mg betragen, der Gesamtpreis für die Teemischung darf 200 € nicht überschreiten und es müssen mindesten 100 g Kirschblüten sowie 400 g der Sorte *Sencha* enthalten sein.

- a) Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell zur Bestimmung einer Teemischung auf, sodass der Geschmackswert unter den gegebenen Beschränkungen maximal wird.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Variable  $x_i$ , welche die Menge der Zutat  $i$  in 100 g angibt ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Beachten Sie die Einheiten der anderen Größen! Das Hinzufügen von Ganzzahligkeitsbedingungen ist nicht notwendig!

- b) Ergänzen Sie das vollständige Modell aus Aufgabenteil (a) um notwendige Schlupfvariable und stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels des Zwei-Phasen-Simplex-Algorithmus auf. Ermitteln

Sie sodann eine zulässige Ausgangslösung (1. Phase) und führen Sie anschließend einen weiteren Simplex-Schritt in der 2. Phase durch. Markieren Sie jeweils das Pivot-Element.

- c) Geben Sie Ihre in Aufgabenteil b) berechnete Lösung vollständig und einschließlich Zielfunktionswert an. Bewerten Sie Ihre Lösung hinsichtlich Optimalität und interpretieren Sie die Größen ökonomisch!
- d) Sie präsentieren *Yuna* für das Optimierungsproblem Ihre Lösung aus Aufgabenteil c). *Yuna* ist Kauffrau und weiß, dass die Einkaufspreise erntebedingt erheblichen Schwankungen unterliegen.
- d1) Geben Sie zunächst die Inverse  $B^{-1}$  der Basis aus dem letzten Tableau von Aufgabenteil c) an.
- d2) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse durch und berechnen Sie das kritische Intervall  $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$  für den maximalen Einkaufspreis der Mischung. Bestimmen Sie dazu zunächst die Vektoren für  $v$ ,  $\tilde{v}$  und  $\tilde{b}$ .
- d3) Bleibt die bereits in Aufgabenteil c) ermittelte Basislösung zulässig, falls der Einkaufspreis der Mischung um bis zu 50 € um den angegebenen Höchstpreis von 200 € schwankt? Interpretieren Sie hierzu das kritische Intervall in Bezug auf die für *Yuna* bereits berechnete Basislösung.
- d4) Hätte *Yuna* die Lösung der Sensitivitätsanalyse bereits aus dem letzten Tableau in Aufgabenteil b) ablesen können, ohne eine umfangreiche Sensitivitätsanalyse durchzuführen? Begründen Sie kurz.
- e) Für eine erste Verkostung möchte *Yuna* sicherstellen, dass zunächst maximal zwei Teesorten mit den Kirschblüten gemischt werden. Wie ist das in Aufgabenteil a) formulierte Modell zu ergänzen, um die zusätzliche Bedingung zu berücksichtigen?

**Aufgabe 3**

**15 Punkte**

Gegeben ist das folgende gemischt-ganzzahlige Programm:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_0 = x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x_3 \text{ ganzzahlig} \end{aligned}$$

Lösen Sie das Maximierungsproblem in Anlehnung an das *Branch und Bound* Verfahren, indem Sie wie folgt vorgehen:

- a) Lösen Sie zuerst das relaxierte Problem mit dem Simplexalgorithmus.
- b) Separieren Sie Ihr in Aufgabenteil a) berechnetes Ergebnis und bestimmen Sie eine optimale Lösung. Sie können auf die Berechnung der Schranken  $U_i$  bzw.  $O_i$  verzichten.
- c) Geben Sie Ihre in Aufgabenteil b) berechnete optimale Lösung an.

**Aufgabe 4**

**15 Punkte**

Zu einem Überdeckungsproblem seien die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Kostenvektor  $c^T = (4 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1)^T$  gegeben.

- a) Formulieren Sie das mathematische Optimierungsmodell für das (unreduzierte) Problem.
- b) Reduzieren Sie die Matrix A mit Hilfe der Reduktionsregeln soweit wie möglich. Notieren Sie jeden einzelnen Schritt mit der dort angewandten Regel sowie die aufgrund dieser gestrichenen Spalten/Zeilen. Geben Sie die gefundene Lösung an.

**Aufgabe 5**

**18 Punkte**

Gegeben sei folgendes lineares Vektor-Maximierungs-Problem (LVMP):

$$\begin{aligned} \max \quad & z(x) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{u.d.N} \quad & \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & \frac{1}{5}x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_2 \leq \frac{11}{2} \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Das (LVMP) ist auf dem Lösungsbogen auf Seite 23 bereits abgebildet. Vervollständigen Sie die Grafik, indem Sie
- die Lösungsmenge  $X$  kennzeichnen und
  - die beiden individuellen Zielfunktionen einzeichnen. Kennzeichnen Sie dabei auch die Richtung der Verschiebung der Zielfunktionen.
- b) Entnehmen Sie der Grafik sämtliche zulässige Ecken  $x^k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  des Lösungspolyeders und stellen Sie diese in einer Tabelle zusammen. Berechnen Sie die zugehörigen Zielfunktionswerte für  $z_1(x^k)$  sowie  $z_2(x^k)$  und kennzeichnen Sie das jeweilige Maximum.
- c) Erstellen Sie ausgehend von der Tabelle aus Aufgabenteil b) eine Grafik mit einem  $(z_1, z_2)$ -Koordinatensystem und sämtlichen zulässigen Zielwertvektoren  $Z = \{z(x) \mid x \in X\}$ . Kennzeichnen Sie die Menge der zulässigen Zielwertvektoren  $z(x^k)$  und das jeweilige individuelle Optimum.
- d) Bestimmen Sie grafisch mit Hilfe der in Aufgabenteil c) erstellen Grafik den idealen Zielvektor  $\hat{z}(z_1, z_2)$ . Interpretieren Sie die erhaltene Lösung im Vergleich zu den individuell optimalen Lösungen!



## LÖSUNGSBÖGEN

**Klausur:** Modul 32621  
Optimierungsmethoden des Operations Research

**Termin:** 21.03.2019

**Prüfer:** Prof. Dr. Andreas Kleine

<b>Name, Vorname:</b>
<b>Matrikelnummer:</b>

Aufgabe	1	2	3	4	5				Summe
maximale Punktzahl	22	30	15	15	18				100
erreichte Punktzahl									

**Gesamtpunktzahl:**

**Note:**

Datum:

Unterschriften  
der Prüfer:



## Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621


1. Tragen Sie zunächst sowohl auf das Deckblatt als auch auf das Deckblatt der Lösungsbögen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!
2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigelegten Lösungsbögen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerfen.
3. Die Klausur umfasst 5 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.
4. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben.**
5. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:
  - Casio fx86 oder Casio fx87,
  - Texas Instruments TI 30 X II,
  - Sharp EL 531.

Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle**

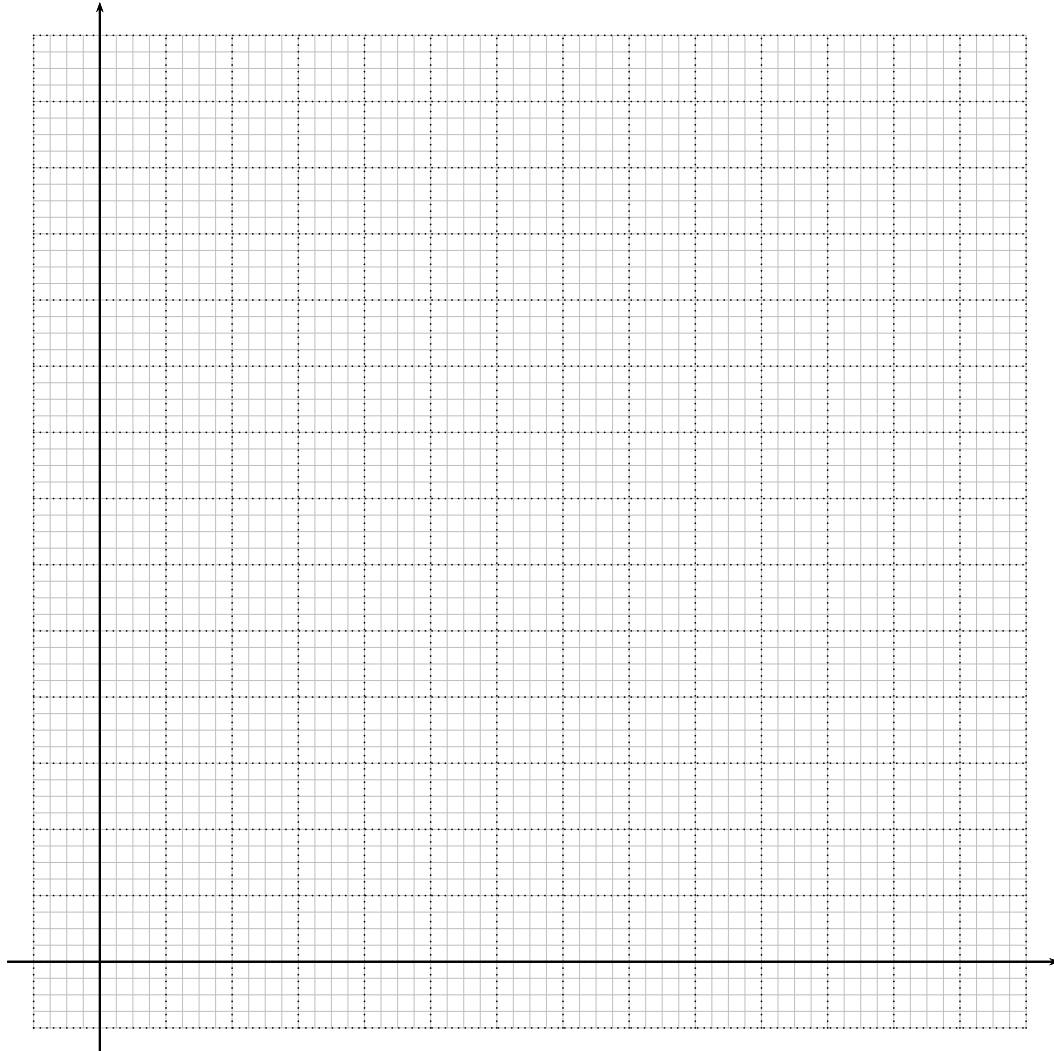
**Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt.**

6. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z.B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.
7. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.
8. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

**Viel Erfolg!**


 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

a)

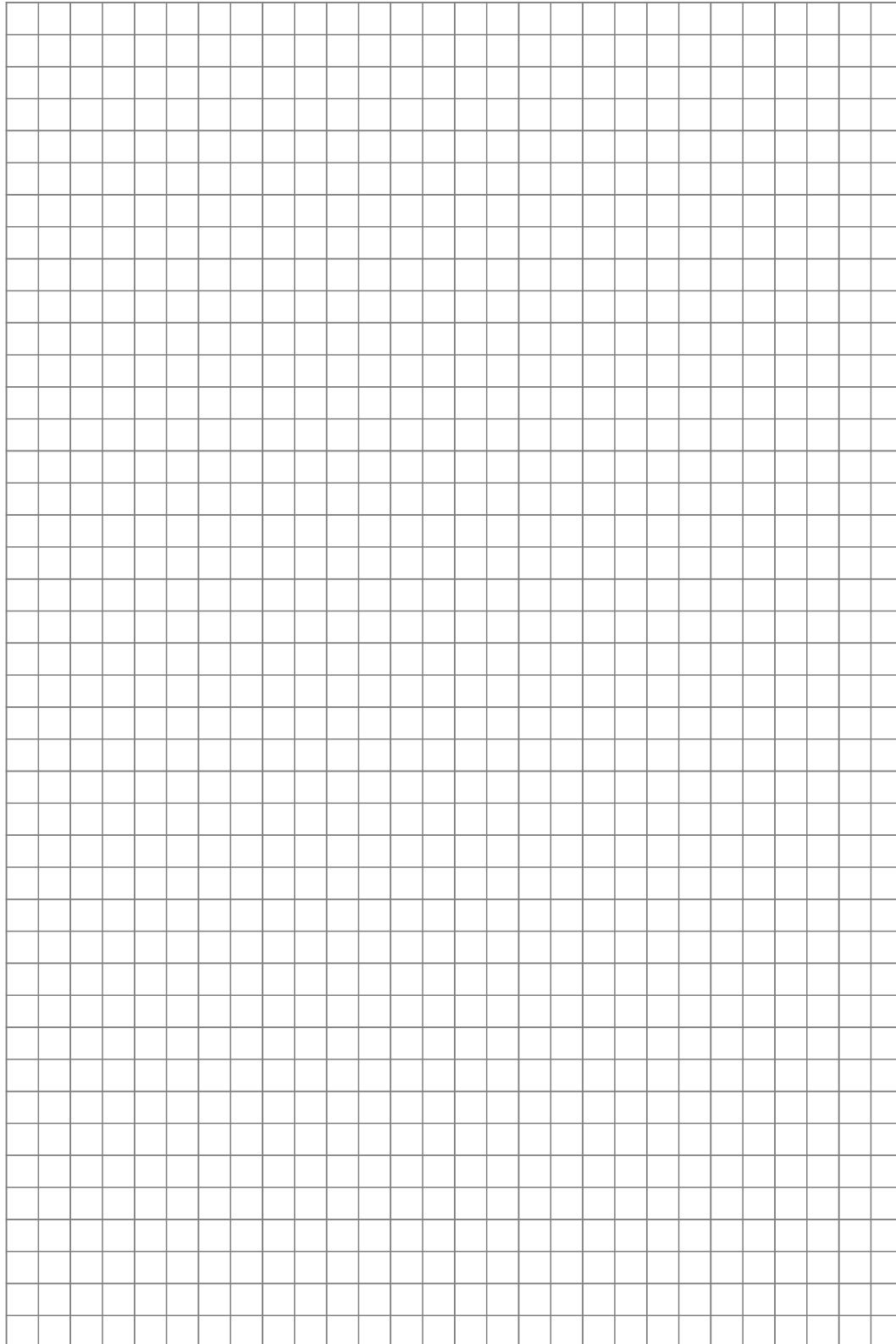


b)


Punkte

 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

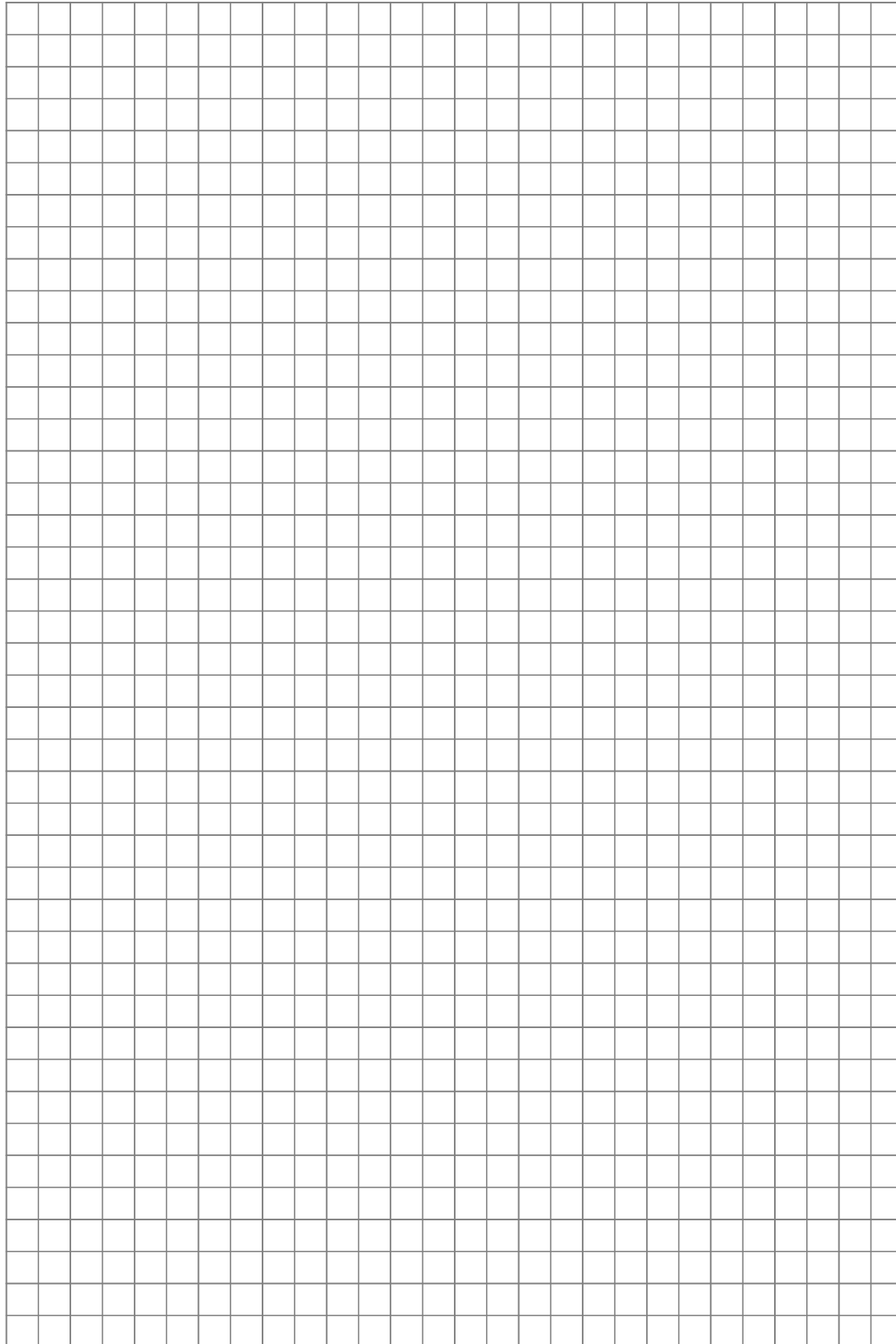
*c, d und e)*




Punkte

 Aufgabe 1 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

Forts. *c*, *d* und *e*)




Punkte

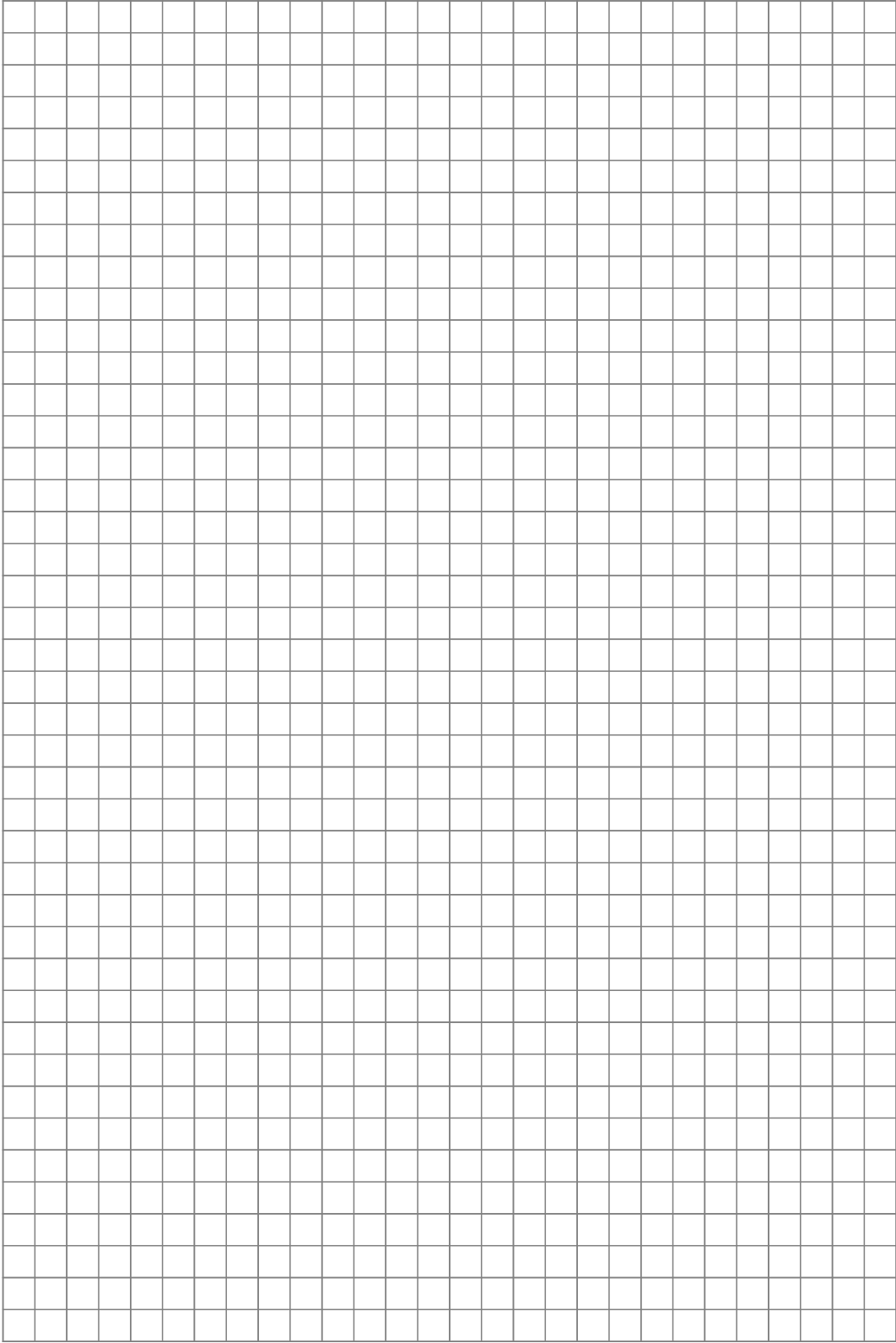
 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

a)


Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

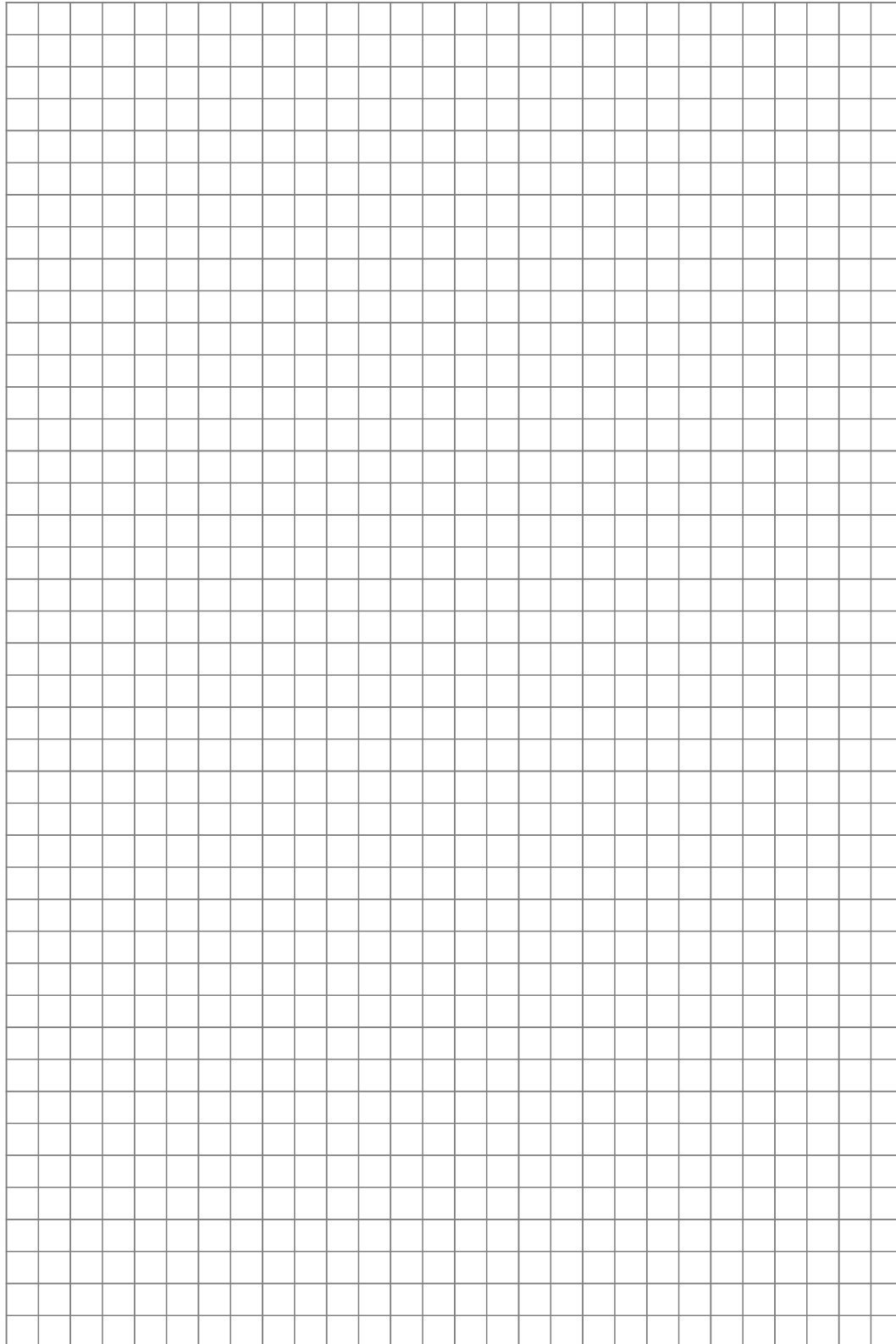
b)



Punkte

 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_


Forts. *b)*



Punkte






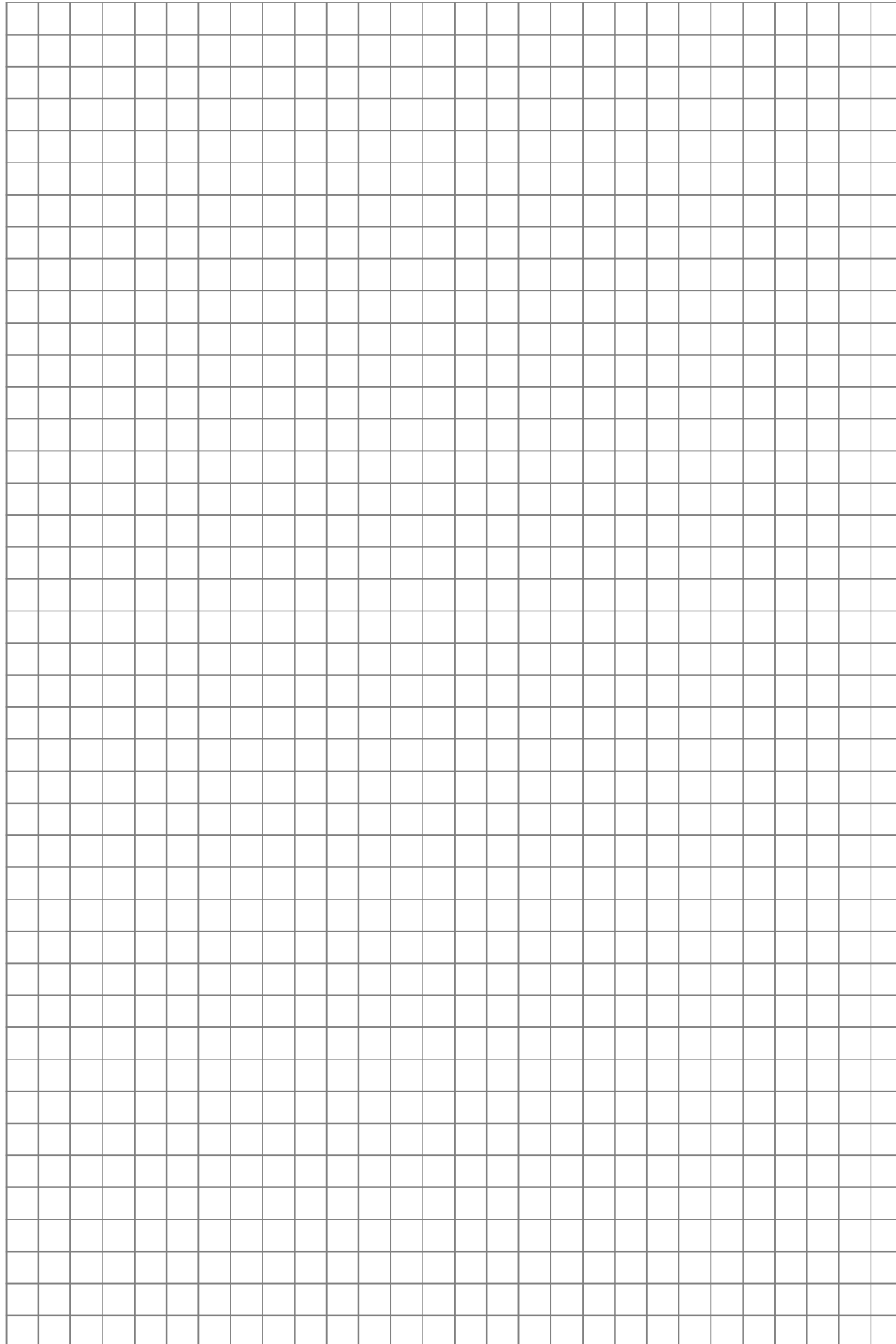
 Aufgabe 2 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

*Forts. d)*


Punkte

 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

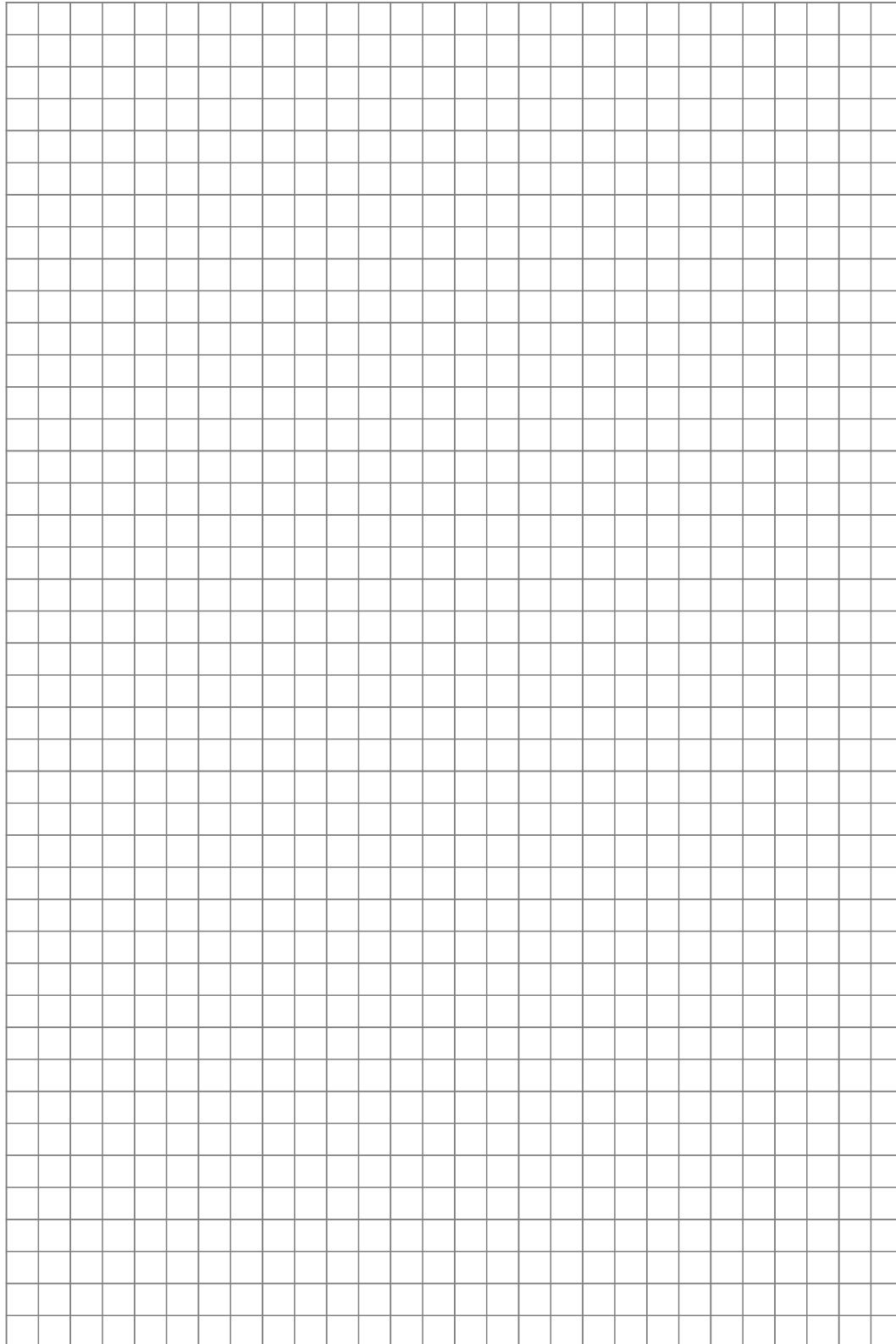
*Bitte kennzeichnen Sie die jeweiligen Aufgabenteile selbständig.*



Punkte


 Aufgabe 3 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

*Forts. Aufg. 3.*




Punkte



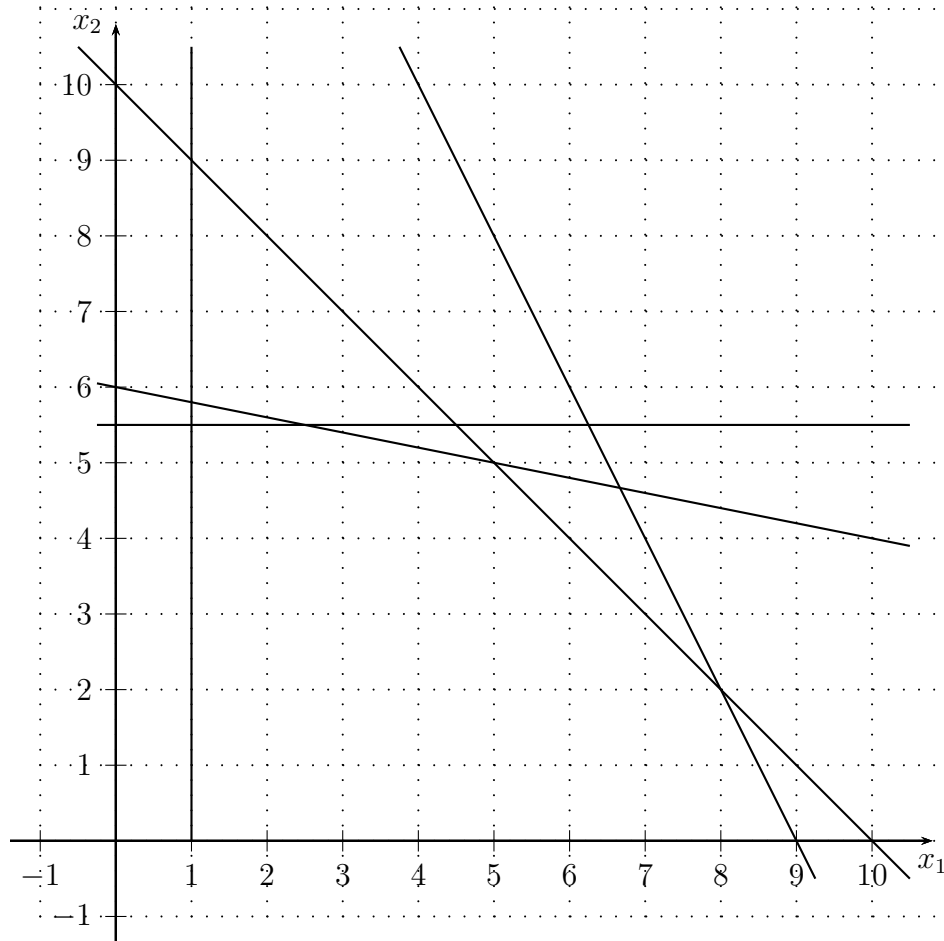
 Aufgabe 4 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

Forts. *b)*

Punkte


 Aufgabe 5 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

a)

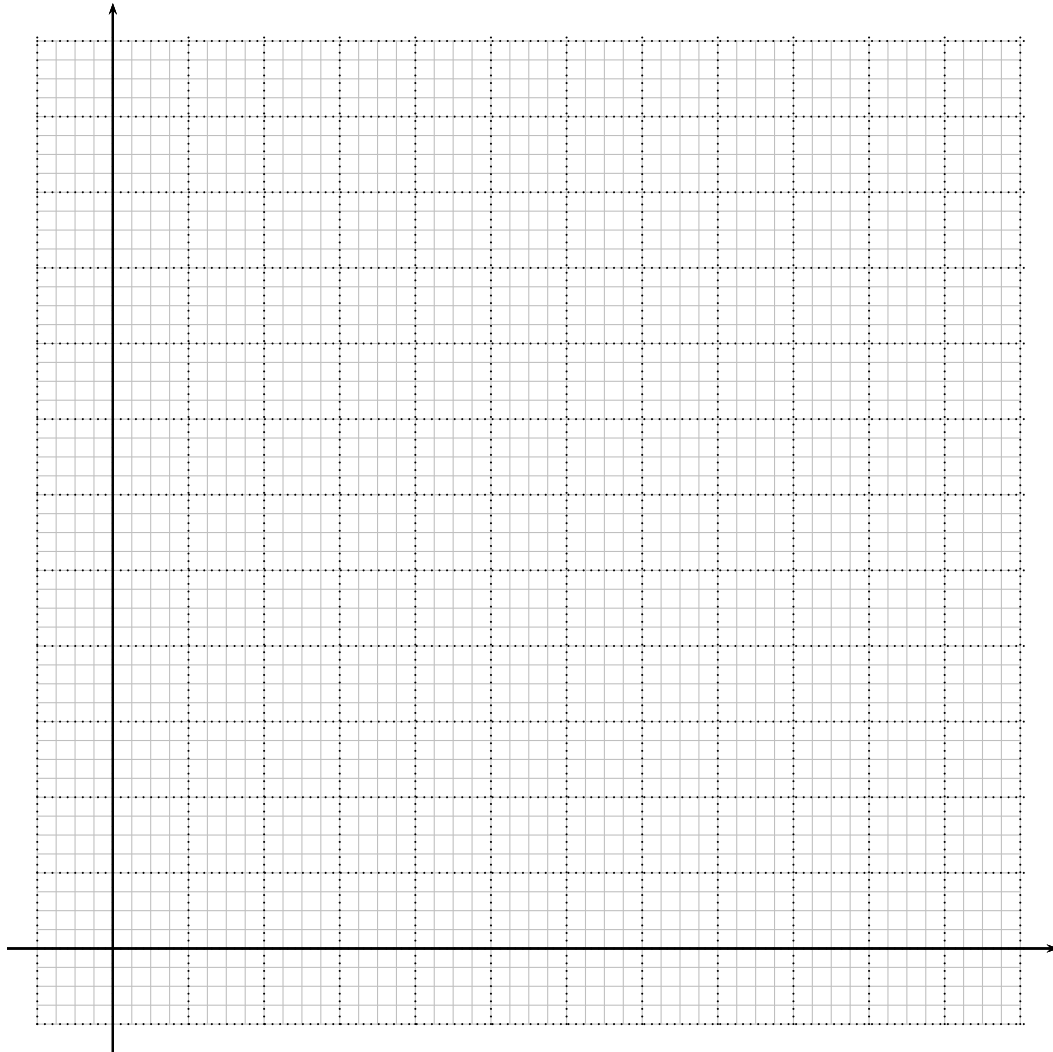


b)

Punkte

 Aufgabe 5 Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

c)




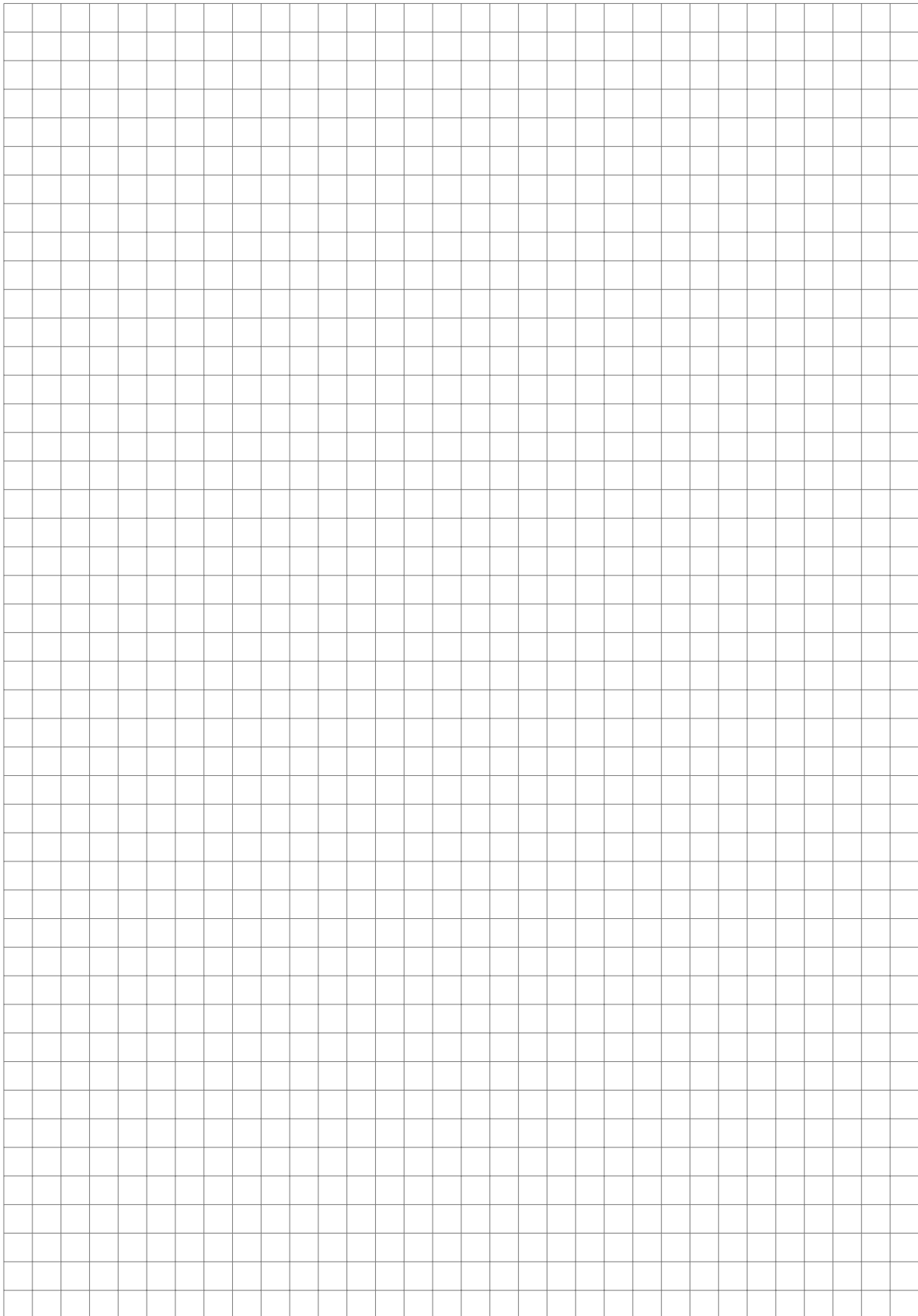
d)

Punkte






 Aufgabe \_\_\_\_ Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_




Punkte



 Aufgabe \_\_\_\_ Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

Punkte

 Aufgabe \_\_\_\_ Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

Punkte

Punkte