Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insb. Quantitative Methoden
und Wirtschaftsmathematik

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine

AUFGABENTEIL

Klausur:	**Modul 32621** **Optimierungsmethoden des Operations Research**
Termin:	**19.03.2020**
Prüfer:	**Prof. Dr. Andreas Kleine**

Aufgabe 1 **28 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & x_0 = 12x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & & \\ \text{u. d. N.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & \leqq & 5 \\ & x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & \leqq & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geqq & 0 \end{array}$$

a) Stellen Sie zum LOP aus Aufgabenteil *a)* das zugehörige *duale* LOP auf!

b) Lösen Sie das *duale* LOP unter Berücksichtigung sämtlicher Nebenbedingungen grafisch! Kennzeichnen Sie den zulässigen Lösungsraum sowie die optimale Lösung. Geben Sie den Lösungsvektor für die ermittelte optimale Lösung sowie den Zielfunktionswert an.

c) Stellen Sie zum *dualen* LOP aus Aufgabenteil *a)* das entsprechende Ausgangstableau zur Anwendung des Simplex Algorithmus auf. Lösen Sie anschließend das *duale* LOP unter Anwendung der *Dualen Simplexmethode*, führen Sie jedoch maximal 3 Simplexschritte aus.

d) Bewerten Sie kurz Ihre Lösung, indem Sie die Werte des Endtableaus aus Aufgabenteil *c)* mit der Lösung aus Aufgabenteil *b)* vergleichen.

e) Das schrittweise Vorgehen des *Dualen Simplex-Algorithmus* aus Aufgabenteil *c)* soll anhand der in Aufgabenteil *b)* erstellten Grafik nachvollzogen werden: Kennzeichnen Sie die Startlösung sowie die Lösung nach jedem *dualen Simplex-Schritt* in der Grafik, z. B. durch eingekreiste römische Ziffern in der Grafik und am entsprechenden Tableau. Kennzeichnen Sie zudem mit Pfeilen die Bewegungsrichtung des Algorithmus von einer zur nächsten Lösung.

Aufgabe 2 **18 Punkte**

Carlotta Contadina hat einen Bauernhof geerbt und möchte dort ökologische Landwirtschaft betreiben. Neben Einkorn, einer alten Getreidearte, beabsichtigt Carlotta auch Kartoffeln und Erbsen anzubauen. Zudem kann sie Rinder und Schafe halten. Für die Nutzung in der Pflanzenproduktion sind folgende Jahreswerte bekannt:

Sparte	Einheit	Leistung je ha	Ertrag je Einheit	Bewirtschaftung
Einkorn	t	2 t	500 €	10 h/ha
Kartoffeln	t	20 t	250 €	100 h/ha
Erbsen	t	6 t	250 €	15 h/ha

Weideflächen können flexibel genutzt werden, um Heu zu produzieren oder Tiere zu halten, wobei folgende Jahreswerte gegeben sind:

Sparte	Einheit	Leistung je ha	Ertrag je Einheit	Bewirtschaftung
Heu	t	16 t	150 €	10 h/ha
Rinder	Rind	20 Rinder	1.000 €	200 h/ha
Schafe	Schaf	40 Schafe	400 €	85 h/ha

Für Carlotta stellt sich nun die Frage, wie sie die Nutzfläche aufteilen soll, um den Gesamtertrag des Bauernhofes zu maximieren. Hierbei hat Carlotta folgende Bedingungen zu berücksichtigen:

- Insgesamt steht Carlotta eine Nutzfläche von 50 ha (ha = Hektar) zur Verfügung, die beliebig teilbar ist und nicht vollständig bewirtschaftet werden muss.
- Zur Bewirtschaftung steht einschließlich Carlotta die Arbeitskraft von 5 Personen à 1600 Stunden pro Jahr zur Verfügung.
- Aufgrund der Ihr zustehenden Quote darf Carlotta nicht mehr als 500 Tonnen Kartoffeln pro Jahr produzieren.
- Die Milchanlage von Carlotta erlaubt es ihr, maximal 200 Rinder zu halten.
- Der Schafstall zur Überwinterung fasst maximal 400 Schafe.

a) Stellen Sie ein lineares Optimierungsmodell auf, welches den Gesamtertrag unter den gegebenen Nebenbedingungen maximiert. Erläutern Sie dabei die verwendeten Entscheidungsvariablen und interpretieren Sie kurz inhaltlich Ihre aufgestellte Zielfunktion.

(Anmerkung: Etwaige Ganzzahligkeit kann vernachlässigt werden.)

b) Welche Anpassung müssen Sie am Modell in Aufgabenteil *a)* vornehmen, wenn keine Fläche brach liegen soll?

c) Carlotta fällt ein, dass Sie für die Bewirtschaftung jedes Hektars der Pflanzenproduktion den Dung von 20 Rindern benötigt. Welche Ergänzung müssen Sie in diesem Fall am Modell aus Aufgabenteil *a)* vornehmen? Erläutern Sie diese nachvollziehbar!

d) Die Tiere benötigen im Winter Heu von der Wiese. Je 20 Rinder werden zwei und je 40 Schafe wird ein Hektar Weidefläche mit Heuanbau benötigt, der dann jedoch keinen weiteren Ertrag mehr abwirft. Formulieren Sie notwendige Anpassungen (Änderungen, Ergänzungen) am Modell aus Aufgabenteil *a)* und erläutern Sie diese nachvollziehbar!

Aufgabe 3	**9 Punkte**

Für ein lineares Optimierungsproblem der Form

$$\max\{\mathbf{c^T x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \text{ mit } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 4},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4,\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^4, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$$

sei folgendes optimales Endtableau gegeben, wobei gegenüber dem Ausgangstableau kein Spaltentausch stattgefunden hat:

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	RHS
$5\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	0	2	780
$\frac{3}{8}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	105
$\frac{5}{8}$	0	1	0	0	$\frac{1}{8}$	0	0	0	50
0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	15
1	0	0	0	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	0	1	30

Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse bezüglich der rechten Seite für $\mathbf{v} = (0, 0, 1, 0, 0)^T$ durch, indem Sie folgende Teilaufgaben bearbeiten:

a) Ermitteln Sie die Basisinverse $\mathbf{B^{-1}}$ sowie die Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{v}}$.

b) Bestimmen Sie nachvollziehbar das kritische Intervall $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ für gegebenes $\mathbf{v}$.

c) Bestimmen Sie anhand des gegebenen optimalen Endtableaus den neuen Zielfunktionswert x_0 für einer Änderung von $\mathbf{b} = (200, 400, \mathbf{120}, 50, 30)^T$ auf $\mathbf{b} = (200, 400, \mathbf{140}, 50, 30)^T$. Begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Aufgabe 4 **20 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Programm (LOP):

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & x_0 = & 4x_1 & + & 6x_2 & & \\ \textbf{u. d. N.} & & 2x_1 & + & 2x_2 & \leqq & 10 \\ & & 4x_1 & + & 10x_2 & \leqq & 35 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geqq & 0,\ x_1 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{array}$$

Lösen Sie das gegebene gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsproblem *grafisch* mit dem *Branch-and-Bound Algorithmus* und dokumentieren Sie Ihr Vorgehen ergänzend in einem Lösungsbaum. Geben Sie dabei zu jedem (Teil-)Problem (Knoten) die vollständige Lösung einschließlich Zielfunktionswert an und beurteilen Sie diese kurz. Tragen Sie die Separation eines Problems in Teilprobleme an den entsprechenden Kanten ab. Geben Sie abschließend die erhaltene Lösung vollständig an und begründen Sie die Zulässigkeit.

Anmerkung: Verwenden Sie als Auswahlregel für das nächste zu bearbeitende Teilproblem die Regel der größten oberen Schranke.

Aufgabe 5 **10 Punkte**

Gegeben ist das folgende binäre lineare Programm eines Überdeckungsproblems, wobei $x_j = 1$ angibt, dass j in der Überdeckung auftritt:

$$
\begin{array}{rrcccccccccc}
\min & x_0 = & x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & & \\
\text{u. d. N.} & & x_1 & & & + & x_3 & & & \geqq & 1 \\
& & & & & & & & x_4 & \geqq & 1 \\
& & x_1 & + & x_2 & & & & & \geqq & 1 \\
& & & & x_2 & + & x_3 & & & \geqq & 1 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0,\ 1\}
\end{array}
$$

Lösen Sie das Überdeckungsproblem mit den im Kurs 00853 aufgeführten Reduktionsregeln für Überdeckungsprobleme. Dokumentieren Sie bei jedem Schritt, welche Regel Sie anwenden und welche Zeile(n) bzw. Spalte(n) Sie ggf. aufgrund der Anwendung der Regel streichen. Geben Sie abschließend die ermittelte Lösung einschließlich Zielfunktionswert an.

Aufgabe 6	**15 Punkte**

Gegeben sind die folgenden Lösungen (Alternativen) $\mathbf{x^1}, \ldots, \mathbf{x^6}$ eines linearen Vektor-Minimierungmodells mit den zu minimierenden Zielfunktionen $z_1(\mathbf{x^k})$ und $z_2(\mathbf{x^k})$:

$\mathbf{x^k}$	$\mathbf{x^1}$	$\mathbf{x^2}$	$\mathbf{x^3}$	$\mathbf{x^4}$	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{x^6}$
$z_1(\mathbf{x^k})$	30	55	60	40	25	15
$z_2(\mathbf{x^k})$	15	40	65	65	60	40

a) Stellen Sie die Menge sämtlicher Zielwertvektoren Z grafisch dar und bestimmen Sie den idealen Zielwertvektor $\hat{\mathbf{z}}$. Beschriften Sie die Zielwertvektoren dabei für $i = 1, \ldots, 6$ mit $\mathbf{z^i}$ (bspw. entspricht $\mathbf{z^1}$ somit $\mathbf{z}(\mathbf{x^1})$).

b) Entscheiden Sie bei den nachstehenden Aussagen, ob diese richtig oder falsch sind und begründen Sie Ihre Aussage. *Anmerkung: Eine richtige Entscheidung für wahr oder falsch genügt nicht, wenn Sie Ihre Antwort nicht begründen.*

i. Die Lösungen $\mathbf{z^4}, \mathbf{z^5}$ und $\mathbf{z^6}$ sind effizient.

ii. Im Fall eines Vektor-Maximierungs-Problems würde der Punkt $\mathbf{z^3}$ einer *perfekten Lösung* entsprechen.

iii. Im vorliegenden Fall existiert kein Zielkonflikt, da die Menge der effizienten Lösungen eindeutig bestimmbar ist.

iv. Gegeben die zu minimierende Kompromisszielfunktion

$\Psi(z(\mathbf{x})) = 2z_1(\mathbf{x}) + z_2(\mathbf{x})$

entspricht der Punkt $\mathbf{z^6}$ der kompromiss-optimalen Lösung.

v. Der durch die Punkte $\mathbf{z^i}$ mit $i = 1, \ldots, 6$ aufgespannte Zielwertraum Z ist konkav, sodass sämtliche *effiziente* Lösungen zugleich auch *wesentlich effizient* sind.

LÖSUNGSBÖGEN

Klausur: **Modul 32621**
Optimierungsmethoden des Operations Research

Termin: **19.03.2020**

Prüfer: **Prof. Dr. Andreas Kleine**

Name, Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**
maximale Punktzahl	28	18	9	20	10	15	100
erreichte Punktzahl							

Gesamtpunktzahl:

Note:

Datum:

Unterschrift
des Prüfers:

Hinweise zur Bearbeitung der Modulklausur 32621

1. Tragen Sie zunächst auf das Deckblatt der Lösungsbögen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!

2. Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur die beigefügten Lösungsbögen und tragen Sie dort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Trennen Sie von den Lösungsbögen keine Blätter ab; am Ende der Klausur müssen alle Lösungsbögen abgegeben werden. Die Lösungen müssen in den dafür vorgesehenen Raum auf den Lösungsbögen eingetragen werden. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Rückseiten oder die freien Blätter am Ende und geben Sie einen deutlichen Hinweis auf die Aufgabenzugehörigkeit. Bedenken Sie bitte bei der Anfertigung Ihrer Lösungen, dass vor allem der Lösungsweg einschließlich Ansatz und Zwischenschritten bewertet wird. Bei einem mehrfach bearbeiteten Aufgabenteil wird lediglich die erste Lösung bewertet. Nicht zu korrigierende Lösungsteile sind zu entwerten.

3. Sollten Sie Ihre Lösung auf der Rückseite oder einem der freien Blätter am Ende fortsetzen, geben Sie hierzu bitte einen deutlichen Querverweis an.

4. **Rot ist die Korrekturfarbe!** Verwenden Sie daher bei farbigen Eintragungen im Text, in Tableaus oder in Grafiken nicht die Farbe Rot.

5. Die Klausur umfasst 6 Aufgaben, die in 120 Minuten zu bearbeiten sind.

6. Zu jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angegeben; die Summe aller Punkte beträgt 100. Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht wurden. **Bitte kontrollieren Sie sofort, ob Sie ein vollständiges Klausurexemplar erhalten haben!**

7. Die Verwendung eines Taschenrechners ist – sofern überhaupt ein Taschenrechner als Hilfsmittel in einer Klausur zugelassen ist – dann und nur dann erlaubt, wenn dieser einer der folgenden Modellreihen angehört:

   - Casio fx86 oder Casio fx87,
   - Texas Instruments TI 30 X II,
   - Sharp EL 531.

   Die Verwendung anderer Taschenrechnermodelle wird als Täuschungsversuch gewertet und mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) sanktioniert. Ob ein Taschenrechner einer der drei Modellreihen angehört, können Studierende selbst überprüfen, indem sie die vom Hersteller auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung mit den oben angegebenen Bezeichnungen vergleichen: Bei **vollständiger** Übereinstimmung ist das Modell erlaubt. Ist die auf dem Rechner angebrachte Modellbezeichnung umfangreicher, enthält aber eine der oben angegebenen Bezeichnungen **vollständig**, ist das Modell ebenfalls erlaubt. In allen anderen Fällen ist das Modell nicht erlaubt. **Eventuelle Vorgänger- oder Nachfolgemodelle, die nicht in der oben aufgeführten Liste enthalten sind, sind ebenfalls nicht erlaubt**.

8. Darüber hinaus sind ausschließlich die zum Modul gehörenden Kurseinheiten einschließlich der darin enthaltenen Lösungen zu den Übungsaufgaben sowie der Modul-Leitfaden zugelassen. Die Kurse dürfen Unterstreichungen, Markierungen und textbezogene Anmerkungen (z. B. Zwischenschritte oder Nebenrechnungen) enthalten. Auch Griffregister bspw. Klebezettel sind zugelassen und können mit Stichworten versehen werden. Nicht zugelassen sind eingelegte Seiten aller Art.

9. Vergessen Sie nicht, die Klausuren auf der letzten von Ihnen bearbeiteten Seite zu **unterschreiben**.

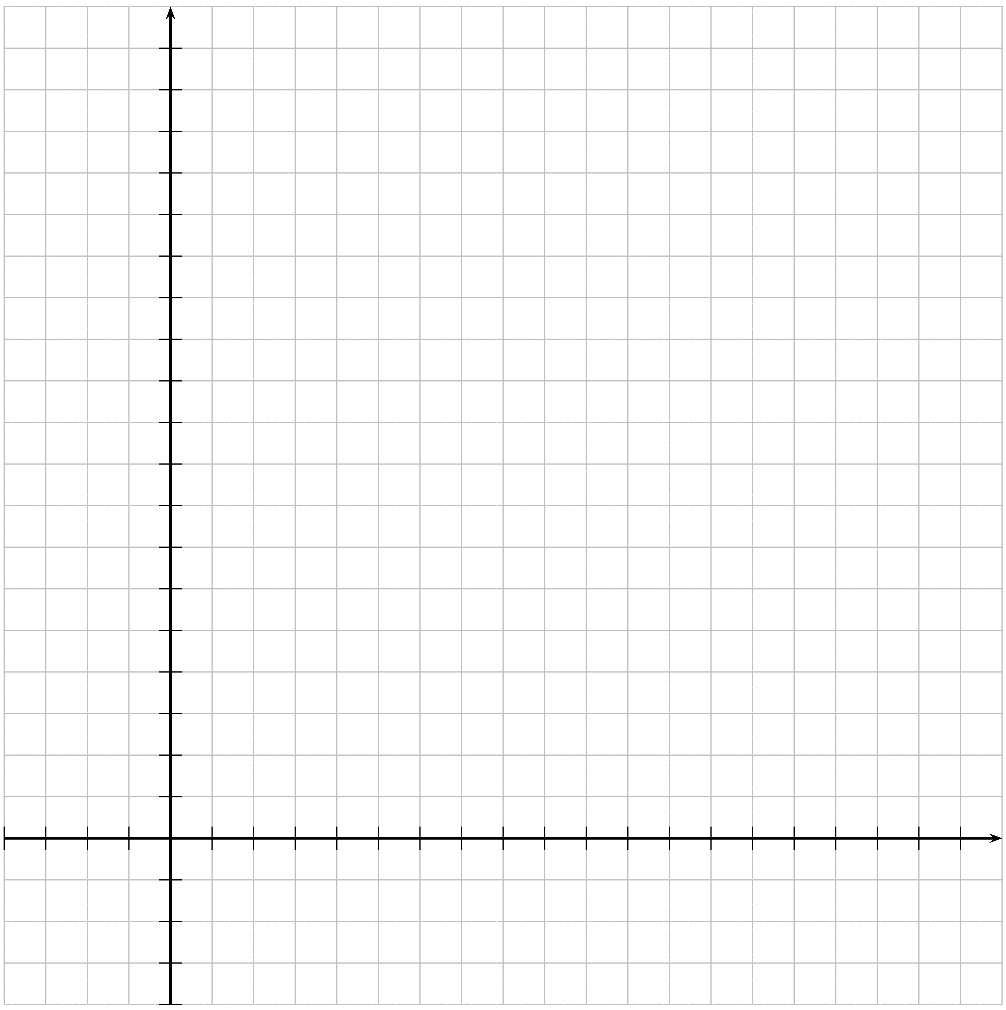
10. Lesen Sie den Aufgabentext gut durch und nun:

Viel Erfolg!

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)



Lösung:

Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

Punkte

✎ Aufgabe **1** Matr.-Nr.: ______________________________

(ggf. Forts. c)

d)

e) Ergänzen Sie gemäß Aufgabenstellung die Lösungen der Teilaufgaben *b)* und *c)*.

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

a)

b)

Punkte

✎ Aufgabe **2** Matr.-Nr.: ______________________________

c)

d)

Punkte

✎ Aufgabe **3** Matr.-Nr.: ______________________________

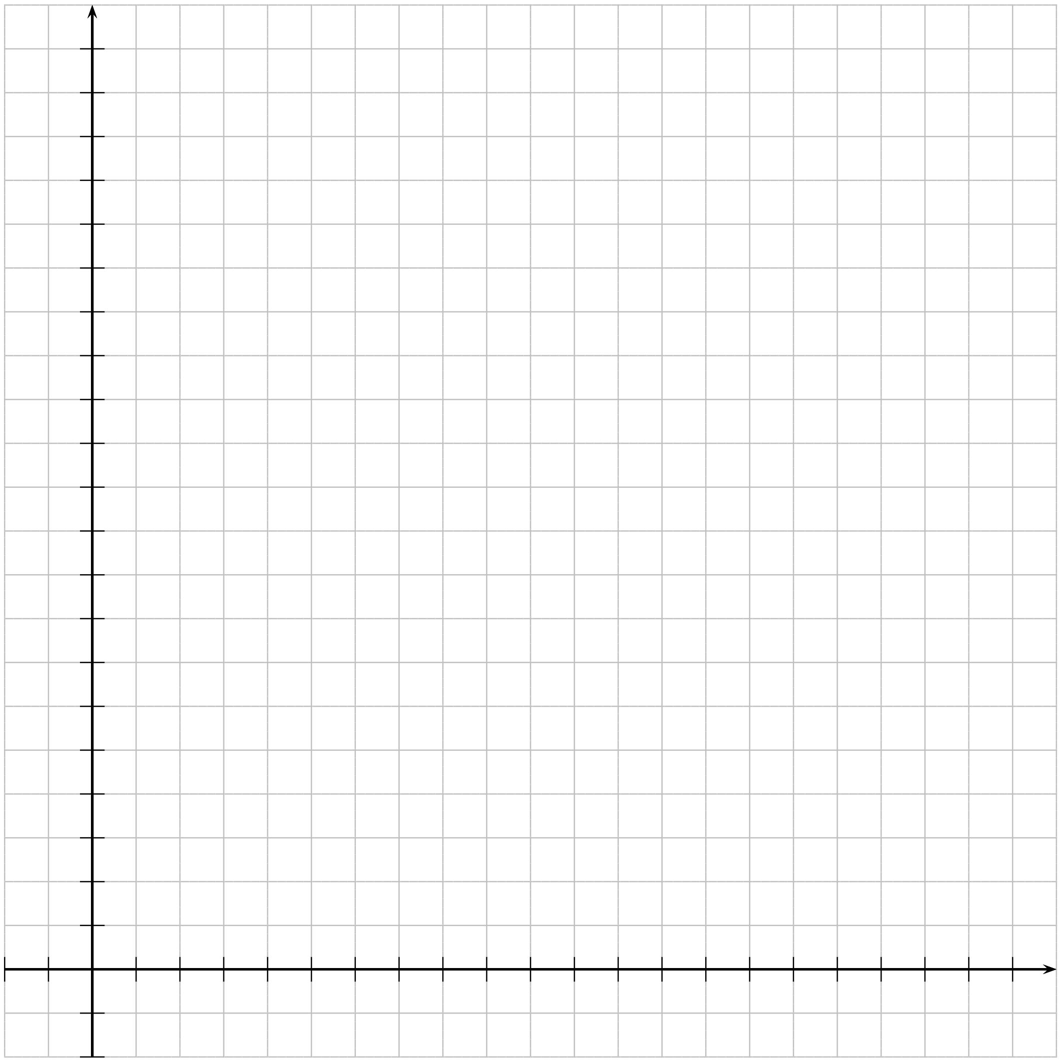
a)

b)

c)

Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________



Punkte

✎ Aufgabe **4** Matr.-Nr.: ______________________________

(Forts. Aufgabe 4)

Punkte

✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

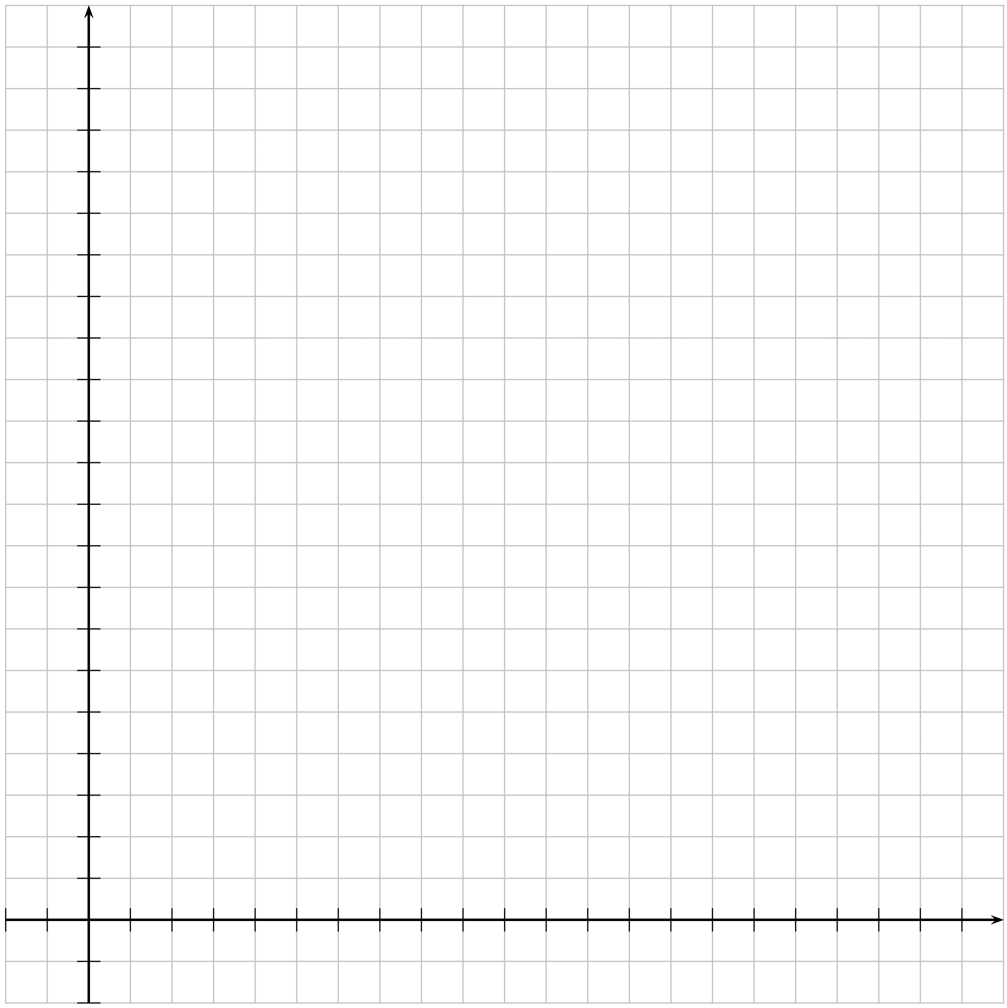
✎ Aufgabe **5** Matr.-Nr.: ______________________________

(Forts. Aufgabe 5)

Punkte

✎ Aufgabe **6** Matr.-Nr.: ______________________________

a)



Punkte

✎ Aufgabe **6** Matr.-Nr.: ______________________________

b)

Punkte

✎ Aufgabe ________ Matr.-Nr.: ________________________________

Punkte

✎ Aufgabe ________ Matr.-Nr.: ______________________________

Punkte

✎ Aufgabe ________ Matr.-Nr.: ________________________________

Punkte

✎ Aufgabe ________ Matr.-Nr.: ________________________________

Punkte