MATHEMATIK FÜR INGENIEURE I/II

Prüfungsklausur am 26. Februar 2005

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

Aufgabe 1

(i) Es ist $|-i| = 1,\ \arg(-i) = 3\pi/2,$ also ergeben sich die drei 3.Wurzeln mit

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{3\pi}{2\cdot 3} + i\sin\frac{3\pi}{2\cdot 3}\right) = i\ , \\
w_2 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos(\frac{3\pi}{2\cdot 3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{2\cdot 3} + \frac{2\pi}{3})\right) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ , \\
w_3 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos(\frac{3\pi}{2\cdot 3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{2\cdot 3} + 2\cdot\frac{2\pi}{3})\right) = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ .
\end{aligned}$$

(ii)
$$w_1 + w_2 + w_3 = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})i = 0$$

Die Produkte berechnen wir über die Argumente von w_1, w_2, w_3. Deren Summe ist

$$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi - \frac{\pi}{6} = 3\pi + \frac{\pi}{2} \quad = \quad 4\pi - \frac{\pi}{2}\ ,$$

also ist

$$w_1w_2w_3 \quad = \quad \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i\ .$$

Weiter ist

$$\arg w_1 - \arg w_2 - \arg w_3 \quad = \quad \frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{6} - 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi - 4\pi$$

und somit

$$\frac{w_1}{w_2w_3} \quad = \quad \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i\ .$$

Aufgabe 2

$$g: \qquad \mathbf{x}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;+\; t \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$E: \qquad x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \;=\; 1$$

(i) Es ist

$$\mathbf{a} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \;,\quad \mathbf{n} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

($\mathbf{a}$ die Richtung der Geraden, $\mathbf{n}$ die der Ebenennormalen), und g liegt parallel zu E, wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ ist. Aus

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \;=\; \alpha + \frac{1}{2} + \frac{11}{3} \;=\; 0$$

folgt

$$\alpha \;=\; -\frac{1}{2} - \frac{11}{3} \;=\; -\frac{25}{6} \;,$$

die gesuchte Parallele zu E ist also

$$g: \qquad \mathbf{x}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;+\; t \begin{pmatrix} -\frac{25}{6} \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \;.$$

(ii) g schneidet die x_1, x_2–Ebene für

$$x_3 = 3 + 11t = 0 \;,\quad t = -\frac{3}{11} \;,$$

also im Punkt

$$\left(1 + \frac{3}{11} \cdot \frac{25}{6},\; 2 - \frac{3}{11}, 0\right) \;=\; \left(\frac{47}{22}, \frac{19}{11}, 0\right) \;.$$

Aufgabe 3

	x_1	x_2	x_3	b
I	$\boxed{2}$	3	1	0
	$\lambda - 1$	0	1	1
	3	1	-1	λ
	0	$3\lambda - 3$	$\lambda - 3$	-2
	0	7	5	-2λ
II	0	$\boxed{7}$	5	-2λ
	0	$3\lambda - 3$	$\lambda - 3$	-2
III	0	0	$-4\lambda - 3$	$3\lambda^2 - 3\lambda - 7$

Da für $\lambda = -\frac{3}{4}$

$$-4\lambda - 3 = 0 \neq 3\lambda^2 - 3\lambda - 7 = -\frac{49}{16}$$

gilt, folgt aus III, daß für $\lambda = -\frac{3}{4}$ das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Sein Rang ist in diesem Fall 2.

Sei nun $\lambda \neq -\frac{3}{4}$. Aus III ergibt sich

$$(-4\lambda - 3)x_3 = 3\lambda^2 - 3\lambda - 7 \ ,$$

d.h.

$$x_3 = \frac{-3\lambda^2 + 3\lambda + 7}{4\lambda + 3} \ .$$

Dies eingesetzt in II ergibt

$$7x_2 \;+\; \frac{-15\lambda^2 + 15\lambda + 35}{4\lambda + 3} \;=\; -2\lambda \;,$$

also

$$x_2 \;=\; \frac{7\lambda^2 - 21\lambda - 35}{7(4\lambda + 3)} \;=\; \frac{\lambda^2 - 3\lambda - 5}{4\lambda + 3} \;.$$

Aus I erhält man schließlich

$$2x_1 \;+\; \frac{3\lambda^2 - 9\lambda - 15 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 7}{4\lambda + 3} \;=\; 0$$

und damit

$$x_1 \;=\; \frac{3\lambda + 4}{4\lambda + 3} \;.$$

Also besitzt das gegebene Gleichungssystem für $\lambda \neq -\frac{3}{4}$ die einzige Lösung

$$\mathbf{x}_\lambda \;=\; \frac{1}{4\lambda + 3} \begin{pmatrix} 3\lambda + 4 \\ \lambda^2 - 3\lambda - 5 \\ -3\lambda^2 + 3\lambda + 7 \end{pmatrix}$$

und hat den Rang 3.

<u>**Aufgabe 4**</u>

(i) Die Summanden mit ungeradem n verschwinden, und wir haben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{2k}}{2k} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \;,$$

also die <u>divergente</u> harmonische Reihe.

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(\frac{1}{4})^n} x^n$$

Den Konvergenzradius r erhalten wir etwa über das Quotientenkriterium:

$$\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(\frac{1}{4})^n} \cdot \frac{(\frac{1}{4})^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{4}}} \quad = \quad \frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{n}{n+1}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4} \qquad \text{für } n \to \infty \ ,$$

also ist

$$r \quad = \quad \frac{1}{4}$$

(d.h. die Potenzreihe konvergiert für x mit $|x| < \frac{1}{4}$, sie divergiert für x mit $|x| > \frac{1}{4}$.)

Für $x = \frac{1}{4}$ liegt Divergenz vor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \cdot \sqrt[4]{n} \cdot (\frac{1}{4})^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[4]{n} \quad = \quad \infty$$

(da $\sqrt[4]{n} \geq 1$), ebenso für $x = -\frac{1}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \cdot \sqrt[4]{n}(-1)^n (\frac{1}{4})^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt[4]{n}$$

(auch hier bilden die Summanden keine Nullfolge).

Wegen $r = \frac{1}{4}$ konvergiert die Potenzreihe für $x = \frac{1}{10}$, sie divergiert für $x = 1$.

Aufgabe 5

Nach dem angegebenen Programm sollte die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} \quad = \quad \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}$$

diskutiert werden.

i) Als rationale Funktion ist f überall außer in den Nullstellen des Nenners definiert und auf seinem Definitionsbereich nicht nur stetig, sondern unendlich oft differenzierbar; es ist

$$D(f) \;=\; \mathbb{R}\backslash\{1\}\ .$$

ii) Ränder des Definitionsbereichs sind $-\infty, \infty$ und 1, es ist

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \;=\; 1$$

und genauso

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \;=\; 1\ .$$

Für $x \to 1$ konvergiert der Nenner von f gegen 0 und ist dabei stets positiv, der Zähler konvergiert gegen 1, also gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) \;=\; \infty\ .$$

iii) Aus ii) folgt unmittelbar, daß $x = 1$ senkrechte Asymptote von f und $y = 1$ Asymptote von f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ ist, letzteres kann natürlich auch wie in MIng II, 2.5.1 berechnet werden, was aber unnötig ist – aus $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ folgt automatisch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

iv) Da der Zähler von f gleich $(x-2)^2$ ist, hat f die einzige Nullstelle $x = 2$.

v) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x-2)^2}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-2)[(x-1)-(x-2)]}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2(x-2)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

mit der einzigen Nullstelle $x = 2$, die somit einziger Kandidat für eine Stelle eines relativen Extremums ist. Zur näheren Untersuchung berechnen wir

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x-1)^3 - 3(x-1)^2 2(x-2)}{(x-1)^6} \\ &= \frac{2(x-1) - 6(x-2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{-4x+10}{(x-1)^4} = 4\frac{(\frac{5}{2}-x)}{(x-1)^4} , \end{aligned}$$

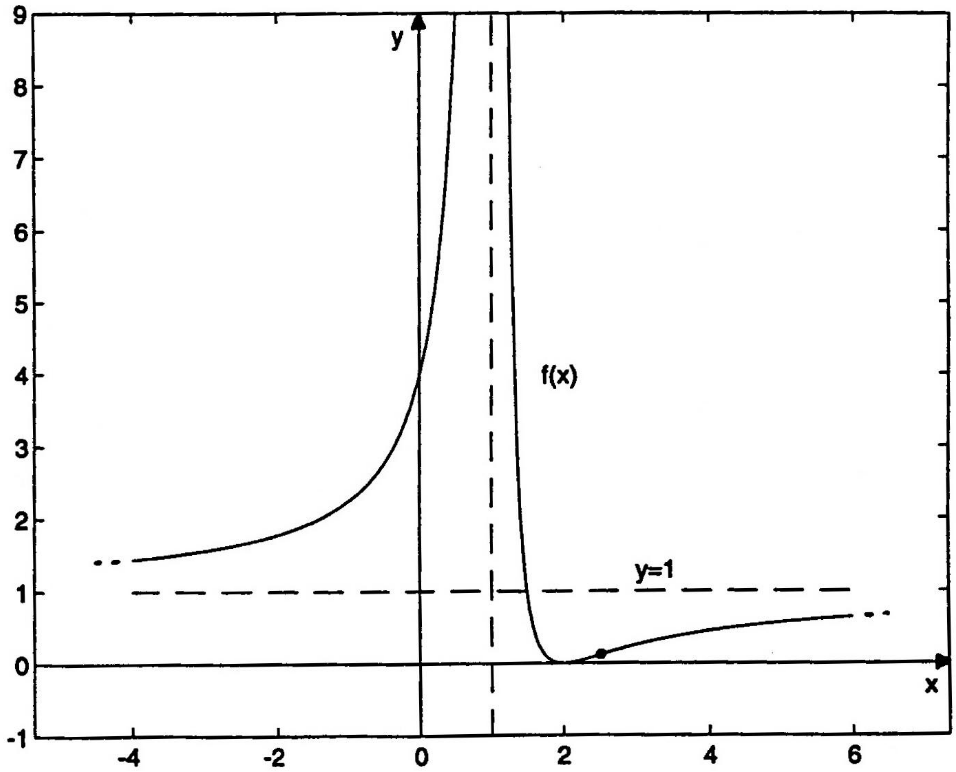
so daß gilt

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x < \frac{5}{2} \\ < 0 & \text{für} \quad x > \frac{5}{2} \end{cases} .$$

In $x = 2$ liegt somit ein relatives Minimum (mit $f(2) = 0$) vor, da $f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$ ist. Das Argument $f(x) \geq 0 = f(2)$ hätte statt der Berechnung von f'' hier auch ausgereicht.

vi) Die nötige Rechnung wurde bereits bei v) erledigt: f ist konvex für $x < \frac{5}{2}$ und konkav für $x > \frac{5}{2}$, in $x = \frac{5}{2}$ liegt ein Wendepunkt vor (mit $f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{9}$ und $f'(\frac{5}{2}) = \frac{8}{27}$) .

vii) f schneidet die Asymptote (d.h. $f(x) = 1$) bei $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2x + 1$, d.h. $3 = 2x$ oder $x = \frac{3}{2}$; $f(0) = 4, f'(0) = -4$. Als Skizze erhalten wir somit



Aufgabe 6

(i)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 6}{x^5} dx &= \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{6}{x^5})\, dx \\ &= \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{6}{4x^4}\Big|_1^2 \\ &= \ln 2 - \frac{49}{2^5}\ .\end{aligned}$$

(ii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 4x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 4x \, dx$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 4x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} (-\sin 4x) \, dx\ ,$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 4x \, dx &= 0 - 2 \left[\frac{1}{2}(e^{\pi} - 1) + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 4x \, dx \right] \\ &= 1 - e^{\pi} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 4x \, dx\end{aligned}$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 4x \, dx = \frac{1 - e^{\pi}}{5}\ .$$

Aufgabe 7

Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren.

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\alpha \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

ergibt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Aus

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & -\alpha \\ 0 & \lambda_1 - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

erhalten wir als Eigenvektor

$$\mathbf{z}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad c_1 \neq 0 \quad \text{beliebig} .$$

Aus

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 & -\alpha \\ 0 & \lambda_2 - \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

erhalten wir

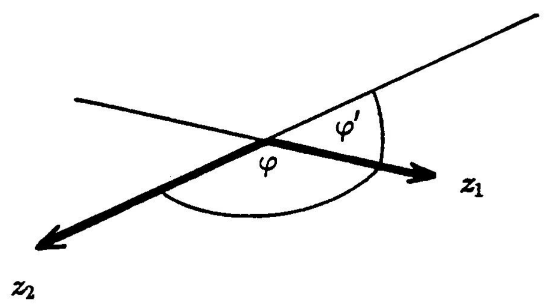
$$\zeta_1 - \alpha\zeta_2 = 0 ,$$

also ist der zweite Eigenvektor von der Form

$$\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \zeta_2\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \zeta_2 \neq 0 \quad \text{beliebig} .$$

Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ hat den Cosinus (s. MIng I, 4.4.7)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_1\|\|\mathbf{z}_2\|} .$$



Der Cosinus des *kleineren* Winkels zwischen den durch $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ aufgespannten Teilräumen – das sind hier Geraden (s.Abb.) – ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\cos\varphi' &= \frac{|\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2|}{\|\mathbf{z}_1\|\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{|c_1||\zeta_2|\,|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}|}{|c_1||\zeta_2|\sqrt{1+\alpha^2}}\\ &= \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\ .\end{aligned}$$

Bei 30° ist $\cos\varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, also

$$\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

$$\begin{aligned}4\alpha^2 &= 3 + 3\alpha^2\ ,\\ \alpha^2 &= 3\ .\end{aligned}$$

Damit ist $\alpha = \sqrt{3}$ die gesuchte Komponente in der Matrix A.

Aufgabe 8

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{-(x+y)} - (x^2+y^2)e^{-(x+y)}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2ye^{-(x+y)} - (x^2+y^2)e^{-(x+y)}\end{aligned}$$

und „Nullsetzen“ führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - y^2 &= 0 \\ 2y - x^2 - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$x^2 + y^2 \;=\; 2x, \quad x^2 + y^2 \;=\; 2y \;,$$

also

$$x \;=\; y$$

und

$$2x^2 \;=\; 2x, \quad x \;=\; 0 \quad \text{oder} \quad x \;=\; 1 \;.$$

Wir erhalten somit die beiden „Kandidaten“

$$(0,0) \quad \text{und} \quad (1,1)$$

für ein Extremum.

Die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (2 - 4x + x^2 + y^2)e^{-x-y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (2 - 4y + x^2 + y^2)e^{-x-y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= (-2x - 2y + x^2 + y^2)e^{-x-y} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta(0,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)^2 \\ &= 2 \cdot 2 - 0 \;=\; 4 > 0 \;, \\ \Delta(1,1) &= 0 \cdot 0 - 4 \cdot e^{-4} < 0 \;. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \;=\; 2 > 0$$

liegt damit in $(0,0)$ ein Minimum vor mit $f(0,0) = 0$ (schärfer: das absolute Minimum wegen $f(x,y) \geq 0$), während $(1,1)$ hingegen einen Sattelpunkt liefert.