Fano-Ebene und Graves-Cayley-Oktonionen

(Nach J.C. Baez. *The octonions.* Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2) (2002), 145-205.)

Die Fano-Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2^3 - \{0\}$ ist die projektive Ebene über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen. Sie verfügt über 7 Punkte $e_1, \ldots, e_7$ und 7 Geraden, die in der obigen Figur durch die Seiten des gleichseitigen Dreiecks, seine Höhen und den die Seitenmitten berührenden Kreis repräsentiert werden. Jede Seite besteht aus 3 Punkten, die sich in der durch die Pfeile angedeuteten Weise zyklisch anordnen lassen. Wird nun der Fano-Ebene, etwa in Gestalt des Koordinatenursprungs $e_0 = 0 \in \mathbb{F}_2^3$, ein weiterer uneigentlicher Punkt hinzugefügt, so können wir die $e_0, e_1, \ldots, e_7$ als Basisvektoren des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^8$ interpretieren und die vorstehende geometrische Konfiguration dazu benutzen, um für diese Basisvektoren nach den folgenden Regeln eine Multiplikationstafel aufzustellen.

- e_0 ist das multiplikative Einselement.
- $e_1, \ldots, e_7$ sind Quadratwurzeln von -1.
- Besteht eine Gerade der Fano-Ebene in zyklischer Anordnung aus den eigentlichen Punkten e_i, e_j, e_k, so gilt

$$e_i e_j = e_k = -e_j e_i \, .$$

Durch die so definierte Multiplikationstafel verwandelt sich $\mathbb{R}^8$ in die (nicht-assoziative reelle) Algebra $\mathbb{O}$ der (Graves-Cayley-) Oktonionen, die von Graves 1843 entdeckt und von Cayley 1845 wiederentdeckt worden war. $\mathbb{O}$ ist die prominenteste unter den achtdimensionalen reellen Divisionsalgebren. Bis auf Isomorphie ist sie die einzige reelle Divisionsalgebra, die alternativ ist, also den Indentitäten

$$x(xy) = x^2 y \, , \; (yx)x = yx^2$$

genügt, ohne jedoch assoziativ zu sein.