**MATHEMATIK FÜR INGENIEURE III/IV**

**Prüfungsklausur am 30. September 2006**

**Lösungsvorschläge zu den Aufgaben**

## Aufgabe 1

Der Punkt $(0,2,1)$ liegt auf der Fläche

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ uv \end{pmatrix} \ ,$$

denn

$$u-v=0 \ , \ u+v=2 \ , \ uv=1$$

hat die Parameter $u=1$ , $v=1$ als Lösung.

Es ist

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{x}_v(u,v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} u-v \\ -u-v \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|| = \sqrt{(u-v)^2+(u+v)^2+4} = \sqrt{4+2u^2+2v^2} \neq 0 \ ,$$

die Fläche ist also regulär mit der Flächennormalen

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} u-v \\ -u-v \\ 2 \end{pmatrix} \ ,$$

im Punkt $(0,2,1)$ somit

$$\mathbf{N}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Die Tangentialebene in $(0,2,1)$ wird von

$$\mathbf{x}_u(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{x}_v(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

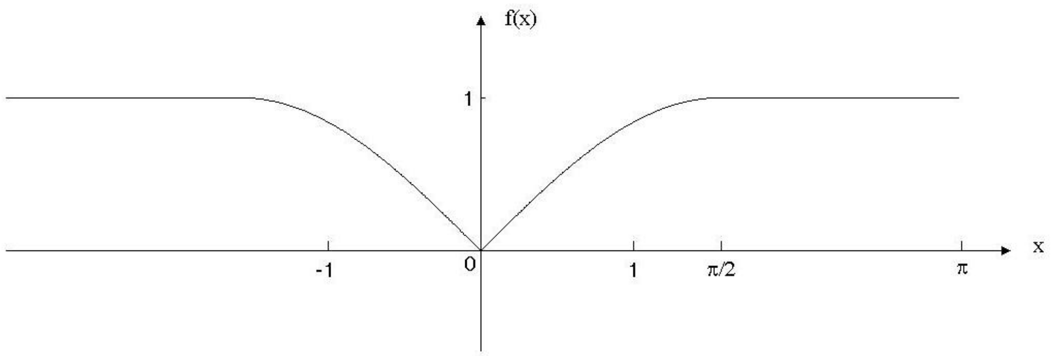
aufgespannt, sie besteht also aus den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ 2 + \lambda + \mu \\ 1 + \lambda + \mu \end{pmatrix} \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

## Aufgabe 2

(i) Die gerade Fortsetzung auf $[-\pi, \pi]$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} \\ \sin|x| & , -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$




(ii) Für die gerade Funktion $f(x)$ erhalten wir als Fourierreihe eine reine Cosinusreihe:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ , \ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ .$$

Zunächst ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \right) = \frac{2}{\pi} + 1 \ ,$$

sodann

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx \, dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin(x-nx)+\sin(x+nx))\, dx + \frac{1}{n}\sin nx \,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x - \frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\sin nx \,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-1}\sin n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n+1}\sin n\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n}\sin n\frac{\pi}{2} - \frac{2}{(n-1)(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{(n-1)n(n+1)}\left(\sin n\frac{\pi}{2} - n\right)
\end{aligned}
$$

für $n > 1$ und

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{4}\cos 2x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi}\ .
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
&f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos nx\ , \\
&a_n = \frac{2}{n(n^2-1)\pi}\left(\sin n\frac{\pi}{2} - n\right)\ .
\end{aligned}
$$

(iii) Nach Satz 2.3.12 und Bemerkung 2.3.13 konvergiert diese Fourierreihe für jedes $x$ gegen $f(x)$, also ist

$$
f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos nx\ .
$$

## Aufgabe 3

$$I = \int\limits_{\partial\triangle} y^3 dx - x\,dy = \int\limits_{\partial\triangle} \begin{pmatrix} y^3 \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{x}$$

(i) Der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Rand $\partial\triangle$ setzt sich aus folgenden drei Teilstrecken zusammen:

$$\partial\triangle = C_1 + C_2 + C_3$$

mit

$$C_1 : \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ 0 \leq t \leq 5$$

$$C_2 : \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 5-t \\ \frac{2}{5}\,t \end{pmatrix} \ , \ 0 \leq t \leq 5$$

$$C_3 : \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \end{pmatrix} \ , \ 0 \leq t \leq 2$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I &= \left( \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3} \right) \begin{pmatrix} y(t)^3 \\ -x(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)\,dt \\ &= \int\limits_0^5 \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int\limits_0^5 \begin{pmatrix} \frac{8}{125}\,t^3 \\ -(5-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} dt + \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} (2-t)^3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= 0 + \int\limits_0^5 \left( -\frac{8}{125}\,t^3 - \frac{2}{5}(5-t) \right) dt + 0 \\ &= -\left( \frac{2}{125}\,t^4 - \frac{1}{5}\,t^2 + 2t \right) \Bigg|_0^5 = -15 \ . \end{aligned}$$

(ii) Nach dem Greenschen Satz ist

$$\int\limits_{\partial\triangle} y^3 dx - x\,dy = \int\limits_{\triangle} (-1 - 3y^2)\, d\sigma(x,y) \ ,$$

wobei

$$\triangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 < x < 5 \ , \ 0 < y < 2 - \frac{2}{5}\,x \right\} \ .$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\triangle} (1+3y^2)\, d\sigma(x,y) \ &= \int\limits_0^5 \int\limits_0^{2-\frac{2}{5}x} (1+3y^2)\, dy\, dx = \int\limits_0^5 (y+y^3)\,\Big|_0^{2-\frac{2}{5}x} dx \\
&= \int\limits_0^5 \left( -\frac{8}{125}\,x^3 + \frac{24}{25}\,x^2 - \frac{26}{5}\,x + 10 \right) dx \\
&= -\frac{2}{125}\,x^4 + \frac{8}{25}\,x^3 - \frac{13}{5}\,x^2 + 10x\,\Big|_0^5 \\
&= 15
\end{aligned}$$

und wieder

$$\int\limits_{\partial\triangle} y^3\, dx - x\, dy = -\int\limits_{\triangle} (1+3y^2)\, d\sigma(x,y) = -15 \ .$$

## Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 2x - 4y \\
\dot{y} &= x - 3y \\
x(0) &= 3 \ , \ y(0) = -1
\end{aligned}$$

Die Laplacetransformation führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
s \cdot L[x] - x(0) &= 2L[x] - 4L[y] \\
s \cdot L[y] - y(0) &= \ \ L[x] - 3L[y]
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
(s-2)L[x] + 4L[y] \ &= 3 \\
-L[x] + (s+3)L[y] \ &= -1
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
(s-2)L[x] + 4L[y] \ &= 3 \\
-(s-2)L[x] + (s-2)(s+3)L[y] \ &= -(s-2) \ ,
\end{aligned}$$

also

$$L[y] = \frac{5-s}{4+s^2+s-6} = \frac{5-s}{(s-1)(s+2)}$$

und dann

$$L[x] = 1 + (s+3)L[y] = \frac{3s+13}{(s-1)(s+2)} \ .$$

Partialbruchzerlegungen:

$$L[y] = \frac{5-s}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} \ , \ A = \frac{4}{3} \ , \ B = -\frac{7}{3}$$

und

$$L[x] = \frac{3s+13}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} \ , \ A = \frac{16}{3} \ , \ B = -\frac{7}{3} \ .$$

Rücktransformation liefert somit die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{16}{3}\, e^t - \frac{7}{3}\, e^{-2t} \\ y(t) &= \frac{4}{3}\, e^t - \frac{7}{3}\, e^{-2t} \end{aligned}$$

oder

$$\mathbf{x}(t) = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

der gegebenen Anfangswertaufgabe.

## Aufgabe 5

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t$$

ist zu lösen, und wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, d.h. die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-4)(\lambda-1) = 0$$

ergibt $\lambda_1 = 4\ ,\ \lambda_2 = 1$ als Eigenwerte.

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2u_1 + 2u_2 &= 0 \\ u_1 + u_2 &= 0 \end{aligned}$$

hat $u_2 = -u_1$ als Lösungen und somit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zum Eigenwert 4. Entsprechend liefert

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

die Lösungen $u_1 = 2u_2$, also etwa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet dementsprechend

$$\mathbf{x}_h(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}\ .$$

Nun zu einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung! Die Inhomogenität ist im Cosinus, wir versuchen es mit einem Ansatz

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \cos t\ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\sin t + c\cos t \\ b\sin t + d\cos t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
a\cos t - c\sin t &= 2a\sin t + 2c\cos t - 2b\sin t - 2d\cos t - 4\cos t \\
b\cos t - d\sin t &= -a\sin t - c\cos t + 3b\sin t + 3d\cos t - 2\cos t
\end{aligned}
$$

Vergleicht man die Koeffizienten von sin und cos jeweils untereinander, so ergibt das die folgenden vier Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&a = 2c - 2d - 4\ ,\ -c = 2a - 2b\ , \\
&b = -c + 3d - 2\ ,\ -d = -a + 3b\ ,
\end{aligned}
$$

die weiter zu

$$
\begin{aligned}
&c = 2(b-a) = 2(-3c + 5d + 2) \\
&d = a - 3b = 5c - 11d + 2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
7c - 10d &= 4 \\
5c - 12d &= -2
\end{aligned}
$$

führen mit den Lösungen $d = 1$ , $c = 2$, was weiter $a = -2$ , $b = -1$ zur Folge hat. Damit:

$$
\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t\ ,
$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$
\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t\ .
$$

## Aufgabe 6

$$
y'' - 2y' + (2\lambda - 1)y = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y(\pi) = 0
$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$
\mu^2 - 2\mu + (2\lambda - 1) = 0\ ,
$$

ihre Lösungen sind

$$
\mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2(1-\lambda)}\ ,
$$

und wir orientieren hieran die Fallunterscheidungen für $\lambda$ .

<u>1. Fall $\lambda < 1$ :</u> Dann sind die $\mu_1, \mu_2$ reell, und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y = \alpha\, e^{(1+\sqrt{2(1-\lambda)})x} + \beta\, e^{(1-\sqrt{2(1-\lambda)})x} \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

Die Randbedingungen fordern

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = \alpha + \beta \\ 0 &= y(\pi) = \alpha\, e^{(1+\sqrt{2(1-\lambda)})\pi} + \beta\, e^{(1-\sqrt{2(1-\lambda)})\pi} \ , \end{aligned}$$

also $\beta = -\alpha$ und

$$\alpha \left( e^{\pi} e^{\sqrt{2(1-\lambda)}\pi} - e^{\pi} e^{-\sqrt{2(1-\lambda)}\pi} \right) = 0 \ .$$

Das ist nur mit $\alpha = 0$ und somit $\beta = 0$ möglich ($e^x \neq e^{-x}$ für $x \neq 0!$), und somit lässt das Randwertproblem nur die triviale Lösung 0 zu, es gibt *keinen* Eigenwert $\lambda < 1$ .

<u>2. Fall $\lambda = 1$ :</u> Jetzt gilt $\mu_1 = \mu_2 = 1$, die allgemeine Lösung lautet also

$$y = \alpha e^x + \beta x e^x \ ,$$

die Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = \alpha \\ 0 &= y(\pi) = \alpha e^{\pi} + \beta \pi e^{\pi} \ , \end{aligned}$$

also $\alpha = 0$ und dann auch $\beta = 0$, wiederum ergibt sich einzig 0 als Lösung, auch 1 ist somit kein Eigenwert.

<u>3. Fall $\lambda > 1$ :</u> Jetzt ist $\mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2(1-\lambda)}$ komplex, und

$$\left\{ e^x e^{\sqrt{2(\lambda-1)}ix} \ , \ e^x e^{-\sqrt{2(\lambda-1)}ix} \right\}$$

bildet ein komplexes Fundamentalsystem, d.h.

$$\left\{ e^x \cos\sqrt{2(\lambda-1)}x \ , \ e^x \sin\sqrt{2(\lambda-1)}x \right\}$$

ein reelles. Wir haben

$$y = \alpha\, e^x \cos\sqrt{2(\lambda-1)}x + \beta\, e^x \sin\sqrt{2(\lambda-1)}x$$

als allgemeine Lösung mit

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = \alpha \\ 0 &= y(\pi) = \alpha e^\pi \cos\sqrt{2(\lambda-1)}\pi + \beta e^\pi \sin\sqrt{2(\lambda-1)}\pi\ , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\alpha = 0 \\ (*)\qquad &\beta \sin\sqrt{2(\lambda-1)}\pi = 0\ . \end{aligned}$$

$(*)$ ist neben $\beta = 0$ (das liefert wieder nur 0 als Lösung) auch mit $\sin\sqrt{2(\lambda-1)}\pi = 0$ zu erfüllen (bei beliebigem $\beta$), also

$$\sqrt{2(\lambda-1)} = n\ ,\ \lambda = 1 + \frac{n^2}{2}\ ,\ n = 1, 2, \dots\ .$$

Das gegebene Randwertproblem hat somit die positiven Eigenwerte

$$\lambda_n = 1 + \frac{n^2}{2}\ ,\ n = 1, 2, \dots$$

mit den Eigenfunktionen

$$y_n(x) = e^x \cdot \sin(nx)\ .$$

## **Aufgabe 7**

Die Wellengleichung

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 2u_{xx} = 0 \\ &u(0,t) = 0\ ,\ u(\pi,t) = 1\ ,\ u(x,0) = x\ ,\ u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

ist zu lösen. Wir setzen die Lösung wieder gemäß MIng IV, Abschnitt 4.4 in der Form

$$u = u_L + u_R + u_A$$

an ($c = \sqrt{2}\ ,\ l = \pi$).

**Ansatz $u_L$ :** Wegen $u(0,t) = 0$ verlangen wir $u_L(0,t) = 0$ , $u_L(\pi,t) = 0$, und das gelingt uns schon mit

$$u_L = 0 \ .$$

**Ansatz $u_R$ :** Wegen $u(\pi,t) = 1$ verlangen wir $u_R(0,t) = 0$ , $u_R(\pi,t) = 1$, das gelingt uns mit

$$u_R = \frac{x}{\pi} \ .$$

**Ansatz $u_A$ :** Für den Ansatz

$$u_A = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\sqrt{2}\,nt + B_n \sin\sqrt{2}\,nt) \sin nx$$

wird

$$\begin{aligned} u_A(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \\ &= u(x,0) - u_L(x,0) - u_R(x,0) \\ &= x - 0 - \frac{x}{\pi} = \frac{\pi - 1}{\pi}\, x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_A}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, n\, B_n \sin nx \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u_L}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u_R}{\partial t}(x,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

gefordert. Die zweite Forderung ist leicht zu erfüllen mit

$$B_n = 0 \ , \ n \geq 1 \ ,$$

für die erste haben wir die Fourierkoeffizienten

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\pi-1}{\pi}\, x\sin nx\,dx = \frac{2(\pi-1)}{\pi^2}\int\limits_0^\pi x\cdot\sin nx\,dx \\
&= \frac{2(\pi-1)}{\pi^2}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\cdot x - \int\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\,dx\right]_0^\pi \\
&= \frac{2(\pi-1)}{\pi^2}\left[-\frac{1}{n}x\cdot\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi \\
&= \frac{2(\pi-1)}{\pi^2}\left[-\frac{1}{n}\,\pi\cdot\cos n\pi\right] \\
&= \frac{\pi-1}{\pi}\cdot\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\ ,
\end{aligned}
$$

also

$$
u_A = \frac{2(\pi-1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos\sqrt{2}\,nt\cdot\sin nx\ .
$$

Alles zusammen liefert

$$
u = \frac{1}{\pi}\left(x + 2(\pi-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos\sqrt{2}\,nt\cdot\sin nx\right)
$$

als Lösung.

## Aufgabe 8

$$
\Phi(y) = \int\limits_0^1 (2y'-x-1)^2\,dx\ ,\ y(0)=1\ ,\ y(1)=\frac{7}{4}
$$

ist zu minimieren. Ein Minimum muss notwendig Lösung der zu $\Phi$ gehörenden Eulerschen Gleichung sein, die wir aus

$$
\begin{aligned}
&F(x,y,y') = (2y'-x-1)^2 \\
&F_y = 0\ ,\ F_{y'} = 4(2y'-x-1) \\
&\frac{d}{dx}F_{y'} = 8y''-4
\end{aligned}
$$

erhalten mit

$$
0 = 8y''-4 \quad \text{bzw.} \quad y'' = \frac{1}{2}\ .
$$

Ihre Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + c_1 x + c_2 \ .$$

Die Randbedingungen ergeben

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_2 \ , \\ \frac{7}{4} &= y(1) = \frac{1}{4} + c_1 + 1 \ , \ c_1 = \frac{1}{2} \ , \end{aligned}$$

also

$$y(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1 \ .$$

Diese Lösung der Eulerschen Gleichung ist nun auch tatsächlich ein Minimum für $\Phi$: Einerseits gilt immer (der Integrand ist positiv!)

$$\Phi(y) \geq 0 \ ,$$

andererseits gilt für unsere Lösung $y$

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_0^1 \left(2\left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\right) - x - 1\right)^2 dx = \int_0^1 0\,dx \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Wenn wir $\Phi(y) \geq 0$ gleich beachten, dann können wir heuristisch schneller auch so vorgehen: Wir vermuten eine Lösung $y$ für $\Phi(y) = 0$, für die dann aber (Integrand!)

$$2y' - x - 1 = 0$$

gelten muss, also

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + c \ .$$

Die Randbedingungen sind mit $c = 1$ zu erfüllen.